Proyecciones
Vol. 22, N^o 3, pp. 209-236, December 2003.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile

LE SEUIL DE RECONSTRUCTIBILITÉ PAR LE HAUT MODULO LA DUALITÉ DES RELATIONS BINAIRES FINIES

JAMEL DAMMAK
Université Claude Bernard Lyon 1, Tunisie

Abstract

Etant donnée une relation binaire R, de base E, on définit sa duale $R^\star$ par $R^\star(x,y) = R(y,x)$. La relation R est dite auto-duale si elle est isomorphe à $R^\star$. Une relation binaire R' est hémimorphe à R, si elle est isomorphe à R ou à $R^\star$. Une relation binaire à n éléments est $(-k)$-demi-reconstructible, si elle est déterminée à l'hémimorphie près, par la donnée à l'hémimorphie près de ses restrictions de cardinal $(n-k)$. L'étude faite en [8] entraîne la (-d)-demi-reconstructibilité des relations binaires finies pour tout $d \geq 12$. Nous étabissons la $(-d)$-demi-reconstructibilité des relations binaires finies pour tout $d \in \{11, 10, 9, 8, 7, 6\}$.

Given a binary relation R of basis E, we define its dual $R^\star$ by $R^\star(x,y) = R(y,x)$. A relation R is self-dual if it is isomorphic to $R^\star$. A binary relation R' is hemimorphic to R, if it is isomorphic to R or to $R^\star$. A relation R defined on n elements is $(-k)$-half - reconstructible if it is determined, up to hemimorphism, by its restrictions of cardinality $(n-k)$. From [8] follows the $(-d)$-half-reconstructibility of finite binary relations, for all $d \geq 12$. We establish the $(-d)$-half-reconstructibility of finite binary relations, for all $d \in \{11, 10, 9, 8, 7, 6\}$.

Mathematics Subject Classification : *03C60; 04A05; 05C20; 05C38; 05C40.*

Key Words : *Relation de différence, Relation binaire, Graphe, Hypomorphe, Hémimorphe, Reconstruction.*

1. Introduction

Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est noté $\mid E \mid$. Une relation binaire R de base E est une application du produit $E \times E$ dans $\{+,-\}$. Les éléments de E sont appelés sommets de R. Les paires de sommets sont appelées arêtes de R. Une arête $\{a,b\}$ est dite neutre si $R(a,b) = R(b,a)$, elle est dite pleine (resp. vide) si $R(a,b) = R(b,a) = +$ (resp. $R(a,b) = R(b,a) = -$). Une arête de R est dite orientée, si elle n'est pas neutre, dans ce cas on dit que a *domine* b si $R(a,b) = +$. On appelle duale de R, la relation $R^\star$ définie sur E par : pour tous éléments $x, y \in E$, $R^\star(x,y) = R(y,x)$. La relation R est dite auto-duale si elle est isomorphe à $R^\star$. L'isomorphie entre deux relations R et R' est notée $R \sim R'$. Une relation binaire T est un tournoi lorsque pour tout élément $x \in E$, $T(x,x) = -$ et pour tous éléments distincts $x, y \in E$, $T(x,y) \neq T(y,x)$. Un 3-cycle (a,b,c) est un tournoi T à 3 éléments défini par $T(a,b) = T(b,c) = T(c,a) = +$. Une k-chaîne est un ordre total irréflexif à k éléments. La restriction de R à une partie X de E, notée R/X, est la relation de base X définie par : pour tous éléments x, y de X, $R/X(x,y) = R(x,y)$. Une relation R de base finie E est dite *connexe*, si pour tous éléments distincts x, y de E, il existe une suite $x_0 = x, x_1, ..., x_k = y$, telle que pour tout $i = 0, 1, ..., k-1$, on a $R(x_i, x_{i+1}) \neq R(x_{i+1}, x_i)$.

Soient R et R' deux relations binaires de bases respectives E et E', et f une bijection de E sur E'. L'application f est dite un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) de R sur R', si pour tous x, y éléments de E, $R'(f(x), f(y)) = R(x,y)$ (resp. $R'(f(x), f(y)) = R^\star(x,y)$). Dans ce cas on dit que R et R' sont isomorphes et on note $R' \sim R$ (resp. R et R' sont anti-isomorphes et on note $R' \sim R^\star$). Une relation binaire R' est hémimorphe à R, si elle est isomorphe à R ou à $R^\star$. Une relation binaire R est dite auto-duale si elle est isomorphe à $R^\star$. Une relation binaire est dite non auto-duale minimale, si elle est non auto-duale et si toutes ses restrictions strictes sont auto-duales. Une relation binaire H s'abrite dans R si H est isomorphe à une restriction de R. Une restriction R/A s'inverse dans R' si $R'/A = R^\star/A$. Deux relations binaires R et R' de base commune E de cardinal n sont dites k-hémimorphes (resp. k-hypomorphes) lorsque pour toute partie X de E de cardinal k, $R'/X \sim R/X$ ou $R'/X \sim R^\star/X$ (resp. $R'/X \sim R/X$); définition analogue lorsque $card(X) \leq k$, on remplace alors le préfixe (k) par $(\leq k)$ dans les notations. La $(n-k)$-hémimorphie (resp. $(n-k)$-hypomorphie) est encore notée $(-k)$-hémimorphie (resp. $(-k)$-hypomorphie). Une relation R est dite k-demi-reconstructible (resp.

k-reconstructible) si toute relation k-hémimorphe (resp. k-hypomorphe) à R, lui est hémimorphe (resp. isomorphe); définition analogue pour la $(\leq k)$-demi-reconstructibilité (resp. $(\leq k)$-reconstructibilité), et aussi de la $(-k)$-demi-reconstruction (resp. $(-k)$-reconstruction).

Dans ce papier nous montrons :

Théorème 3.1 *Les relations binaires finies de cardinal* $n \geq 23$ *sont* $(n-11)$*-demi-reconstructibles.*

Ensuite dans le cas général nous montrons : Pour tout entier $d \geq 6$, les relations binaires finies de cardinal $n \geq 16 + d$ sont $(n-d)$-demi-reconstructibles.

2. Définitions. Notations. Rappels.

Somme lexicographique. Etant donnée une relation S de base $I = \{1, ..., k\}$, associons à chaque $i \in I$, une relation R_i de base I_i de telle sorte que les bases I_i soient deux à deux disjointes. La S-somme des R_i, notée $S(R_1, ..., R_k)$, est la relation définie sur la réunion des I_i de la façon suivante : $S(R_1, ..., R_k)(x, y) = R_i(x, y)$ si $x, y \in I_i$ et $S(R_1, ..., R_k)(x, y) = S(i, j)$ si $x \in I_i$ et $y \in I_j$ et $i \neq j$. Nous dirons aussi que la S-somme des R_i, est obtenue à partir de la relation S en dilatant chaque $i \in I$ par la relation R_i.

Relations particulières. Citons les relations irréflexives particulières suivantes :

- Une *presque-chaîne* de longueur k est obtenue à partir d'une k-chaîne en rendant neutre l'arête liant son premier et son dernier élément. Une presque-chaîne de longueur 3 est dite aussi une 3-consécutivité.

- Un *pic* est une relation à 3 éléments a, b et c telle que l'arête $\{a, b\}$ est neutre et les arêtes $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ sont orientées avec $R(a, c) = R(b, c)$.

- Un *drapeau* est une relation à 3 éléments a, b et c telle que l'arête $\{a, b\}$ est orientée, l'arête $\{b, c\}$ est pleine et l'arête $\{a, c\}$ est vide.

- Un diamant positif (resp. négatif) est un tournoi à 4 sommets constitué d'un 3-cycle (a, b, c) et d'un point d dominé par (resp. dominant) (a, b, c). Le point d est dit sommet du diamant.

- Etant donné un entier h, T_h est le tournoi à $2h+1$ sommets : $0, 1, ..., 2h$ tel que pour tout sommet i, $T_h(i, i+k) = +$ pour $k \in \{1, ..., h\}$, (l'entier $i + k$ étant considéré modulo $2h + 1$). Une relation R est un élément de

$D(T_h)$, si R est un tournoi obtenu en dilatant chaque sommet k de T_h par une chaîne p_k de cardinal fini. Rappelons que $D(T_h)$ est la classe des tournois finis sans diamant ([7], [10]).

- Soient un entier naturel $h \geq 3$ et l'ensemble $F = \{1, ..., h\}$.

* On appelle consécutivité $1 < 2 < ... < h$, l'une des quatre relations définies sur F comme suit :

$[R_1(x, y) = + \ ssi \ (y = x{+}1)]$, $[R_2(x, y) = + \ ssi \ (y = x{+}1 \ ou \ y = x)]$, $[R_3(x, y) = + \ ssi \ (y = x + 1 \ ou \ |y - x| > 1)]$, $[R_4(x, y) = + \ ssi \ (y = x + 1 \ ou \ |y - x| \neq 1)]$.

* On appelle cycle $1 < 2 < ... < h < 1$, l'une des quatre relations définies sur F comme suit : pour toute consécutivité R_i, $(1 \leq i \leq 4)$, le cycle R'_i coïncide avec R_i, sauf peut être sur les couples $(1, h)$ et $(h, 1)$ où on a $R'_i(h, 1) = +$ et $R'_i(1, h) = -$.

- Etant donné un entier $n \geq 1$, on désigne par S_n, l'une des relations définies sur les $2n$ éléments $t_1, ..., t_{2n}$, par : $S_n(t_i, t_{i+n}) = S_n(t_{i+n}, t_i)$ pour $i = 1, ..., n$, $S_n(t_i, t_{i+k}) = -S_n(t_{i+k}, t_i) = +$ pour $k = 1, ..., n - 1$ et pour $i = 1, ..., 2n$ (les entiers ici sont considérés modulo $2n$). On notera δ_n un élément de la famille $E(S_n)$, des extensions de S_n obtenues en augmentant la base de S_n d'ensembles (éventuellement vides) deux à deux disjoints $s_1, ..., s_{2n}$, appelés secteurs de la relation, tels que :

i) Pour tout i, $\delta_n/s_i \cup \{t_i, t_{i+1}\}$ est une chaîne de premier élément t_i et de dernier élément t_{i+1}.

ii) Pour tout i, on a $\delta_n/s_i \cup s_{i+n}$ est un tournoi sans diamant.

iii) Pour tout i, pour tout x de s_i, pour tout y de s_{i+j}, $(j = 1, ..., n-1)$, on a $\delta_n(x, y) = -$, $\delta_n(y, x) = +$, $\delta_n(t_i, y) = -\delta_n(y, t_i) = +$, et pour tout y de s_{i+j}, $(j = n, ..., 2n - 1)$, on a $\delta_n(t_i, y) = -\delta_n(y, t_i) = -$.

Intervalle, Décomposabililité. La notion suivante d'intervalle d'une relation binaire a été introduite par R. Fraïssé en [6]. Etant donnée une relation binaire R de base E, une partie I de E est un R-intervalle, lorsque pour tous éléments $a, b \in I$, tels que $R(a, a) = R(b, b)$, et pour tout élément $x \in E - I$, on a $R(a, x) = R(b, x)$ et $R(x, a) = R(x, b)$. Clairement, l'ensemble vide, les singletons et l'ensemble E sont des intervalles de R, appelés intervalles triviaux. Une relation ayant au moins trois sommets sera dite *indécomposable* lorsque tous ses intervalles sont triviaux, elle est dit *décomposable* dans le cas contraire. Si I et J sont deux R-intervalles, la valeur $R(a, b)$ est une constante quand a (resp. b) décrit l'ensemble I (resp. J) et on note $R(I, J)$ cette constante.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.1. *[9] Les relations binaires finies sont (≤ 6)-reconstructibles.*

Lemme 2.2. *[5] Pour tout entier $d \geq 5$, les relations binaires connexes finies de cardinal $n \geq 7+d$ sont $(n-d)$-demi-reconstructibles.*

Lemme 2.3. *[4] Les relations binaires connexes finies sont (≤ 7)-demi-reconstructibles.*

Lemme 2.4. *[4] Pour tout entier $k \geq 2$, les relations binaires finies abritant un non auto-dual de cardinal k, sont ($\leq k+6$)-demi-reconstructibles.*

Lemme 2.5. *[12] Soient R et R' deux relations binaires de même base E de cardinal fini n. Si R et R' sont q-hémimorphes (resp. q-hypomorphes) où $1 \leq q \leq n-1$, alors pour tout entier $p \leq min(q, n-q)$, R et R' sont p-hémimorphes (resp. p-hypomorphes).*

Lemme 2.6. *[2] Soit B une relation binaire de base $\{1, ..., n\}$ (où $n \geq 2$), $i_0 \in \{1, ..., n\}$, et R (resp. R') la relation obtenu à partir du relation B, en dilatant le sommet i_0 par une relation H (reps. H'). Si les relations R et R' sont isomorphes, alors les relations H et H' sont aussi isomorphes.*

Lemme 2.7. *[1] Soient n, d et h des entiers naturels avec $1 \leq d \leq n-1$ et $1 \leq h \leq n-d$, H une relation binaire à h sommets, et R et R' deux relations binaires $(n-d)$-hémimorphes et de base commune E à n éléments. Alors, pour toute partie A de E à au plus d éléments, le nombre de parties F de E contenant A telle que R/F est hémimorphe à H, est égal au nombre de parties F de E contenant A telle que R'/F est hémimorphe à H.*

Notation. Dans la suite, on utilisera les notations suivantes (faites sous les hypothèses du lemme 2.7) $n(R, H, A) = card\{F \subset E : A \subset FetR/F \sim HouR/F \sim H^\star\} n(R', H, A) = card\{F \subset E : A \subset FetR'/F \sim HouR'/F \sim H^\star\}$.

Sous ces notations, le lemme 2.7 dit que : $n(R, H, A) = n(R', H, A)$.

Lemme 2.8. *([5] et [11]). Soient R et R' deux relations binaires de base commune E de cardinal n.*
i) Pour tout entier $h \geq 1$, si R et R' sont $(4, n-h)$-hypomorphes et si $\mid E \mid \geq 6+h$, alors R et R' sont isomorphes.
ii) Pour tout entier $h \geq 4$, si R et R' sont $(n-h)$-hypomorphes et si $\mid E \mid \geq 6+h$, alors R et R' sont isomorphes.

Relation de différence. La notion de relation de différence a été introduite par G. Lopez dans [9]. Soient deux relations binaires R et R' de même base E, qui sont (≤ 2)-hémimorphes. On définit la relation $D_{R,R'}$ de base E par : pour tout élément x de E, $D_{R,R'}(x,x) = +$ et pour tous éléments distincts x, y de E, $D_{R,R'}(x,y) = +$ lorsqu'il existe une suite $x = x_0, x_1, ..., x_k = y$ d'éléments de E telle que $R(x_i, x_{i+1}) \neq R'(x_i, x_{i+1})$ pour tout i élément de $\{0, 1, ..., k-1\}$. La relation $D_{R,R'}$ est une relation d'équivalence appelée relation de différence dont les classes sont appelées classes de différence.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.9. *[10] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 3)-hypomorphes sur une même base finie E. Toute classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle commun à R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives*

Lemme 2.10. *[10] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 4)-hypomorphes sur une base finie E, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Alors :*

i) Si R/C est un tournoi, alors il existe un entier h tel que R/C est un $D(T_h)$.

ii) Si R/C n'abrite pas de 3-cycle, alors R/C est soit une chaîne, soit une presque-chaîne, soit une consécutivité, soit un cycle.

iii) Si R/C abrite un 3-cycle, et si R/C n'est pas un tournoi, alors il existe un entier n tel que R/C est un élément de $E(S_n)$.

Notons que comme conséquence du lemme 2.10, on a :

Corollaire 2.11. *Soient R et R' deux relations binaires (≤ 4)-hypomorphes sur une base finie E, et C une classe de l 'équivalence $D_{R,R'}$. Alors :*

i) S'il existe un entier h tel que $R/C \in D(T_h)$, alors $R'/C \in D(T^{\star}{}_h)$ et (R'/C et $R^{\star}/C$) sont (≤ 6)-hypomorphes.

ii) S'il existe un entier n telle que R/C est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \in E(S^{\star}{}_n)$, et ($R'/C$ et $R^{\star}/C$) sont (≤ 6)-hypomorphes.

iii) R/C et R'/C n'abritent pas de restrictions non auto-dual de cardinal ≤ 4.

Relation connexe et fortement connexe. Une relation R de base finie E est dite connexe (resp. fortement connexe), si pour tous éléments distincts x, y de E, il existe une suite $x_0 = x, x_1, ..., x_k = y$, telle que pour tout $i = 0, 1, ..., k-1$, on a $R(x_i, x_{i+1}) \neq R(x_{i+1}, x_i)$) (resp.$R(x_i, x_{i+1}) =$

$-R(x_{i+1}, x_i) = +)$. La composante connexe (rep. fortement connexe) d'une partie A de E, telle que R/A est connexe, est la plus grande partie D de E telle que D contient A et la restriction R/D soit connexe (resp. R/D soit fortement connexe).

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.12. *[5] Soient d un entier ≥ 5, R et R' deux relations binaires $(-d)$-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à $7+d$, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si C est différente de sa composante connexe, alors :*

i) C est un intervalle de R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

ii) $R'/C \sim R/C$.

Lemme 2.13. *[5] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E. Si chacune des équivalences $D_{R,R'}$ et $D_{R^\star,R'}$ possède une seule classe, alors R et R' sont des chaînes.*

Lemme 2.14. *[3] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)- hémimorphes sur une base finie E et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si R/C et R'/C sont (≤ 5)-hypomorphes et si R/C est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$.*

Notons que comme conséquence des lemme 2.10 et 2.14 on a :

Corollaire 2.15. *Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)- hémimorphes sur une base finie E, D une composante connexe de R et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Si $k = 6$ et si R/D n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/D \sim R/D \sim R^\star/D$.*

Corollaire 2.16. *Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)- hémimorphes sur une base finie E, D une composante connexe de R et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R.*

i) Si $k \in \{5, 6\}$ et si R/D n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/D \sim R/D \sim R^\star/D$.

ii) Si $k = 6$ et si R/D est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/D \sim R/D \sim R^\star/D$.

Relations binaires non auto-duales minimales. Une relation binaire est dite non auto-duale minimale si elle est non auto-duale et toutes ses restrictions propres sont auto-duales.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.17. *[4] Soient $r \geq 2$ un entier, R et R' deux relations binaires (≤ 4)-hémimorphes sur une base finie E. Si R n'abrite aucune restriction non auto-duale à au plus r sommets, alors les relations $R, R^\star$ et R' sont deux à deux $(\leq r)$-hypomorphes.*

Lemme 2.18. *[4] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, admettant une restriction non auto-duale, k la plus petite cardinalité des restrictions non auto-duales de R/C et I_0 la base d'une de ces restrictions. Alors la restriction R'/I_0 est isomorphe à $R^\star/I_0$.*

Notons que comme conséquence des lemmes 2.17 et 2.18, on a :

Corollaire 2.19. *Soit r un entier, $2 \leq r \leq 6$. Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Alors R/C et R'/C sont $(\leq r)$-hypomorphes ssi R/C n'abrite aucune relation non auto-duale minimale à au plus r sommets.*

Lemme 2.20. *[4] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 6)-hémimorphes sur une base finie E admettant une restriction non auto-duale, k la plus petite cardinalité des restrictions non auto-duales de R , I_0 la base d'une de ces restrictions et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors C est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.*

Lemme 2.21. *[4] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 6)-hémimorphes sur une base finie E, admettant une restriction non auto-duale, C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ égale à sa composante connexe, k la cardinalité minimale des restrictions non auto-duales qui s'abritent dans R, et I_0 la base d'une de ces restrictions. Si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors :*

i) Si R/I_0 n'est pas un drapeau, alors $I_0 \cap C = \phi$.

ii) Si R/I_0 est un drapeau, d'arête neutre $\{c, a\}$ et $\{c, b\}$, alors $I_0 \cap C = \phi$ ou $I_0 \cap C = \{c\}$.

Lemme 2.22. *[4] Soient d un entier ≥ 5, R et R' deux relations binaires $(\leq d)$-hémimorphes sur une base finie E admettant une restriction non auto-duale, k la cardinalité minimale des restrictions non auto-duales qui s'abritent dans R, I_0 la base d'une de ces restrictions et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$.*

i) Si C est différente de sa composante connexe, alors R/C et R'/C sont $(\leq d-1)$-hypomorphes.

ii) Si $d \geq 6$, si $R'/I_0 \sim R/I_0$, si R/I_0 un drapeau et si $C \cap I_0 \neq \phi$, alors R/C et R'/C sont $(\leq d-2)$-hypomorphes.

iii) Si $d \geq 6$ et si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors R/C et R'/C sont $(\leq max(k-1, d-k))$-hypomorphes.

3. La (-11)-demi-reconstructibilité des relations binaires finies.

Théorème 3.1. *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 23$ sont $(n-11)$-demi-reconstructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n-11)$-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 23 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 11)-hémimorphes. Suivant la valeur de k, on a:

-Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n-11)$-demi-reconstructible.

- Si $2 \leq k \leq 5$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 11-demi-reconstructible et par suite R est $(n-11)$-demi-reconstructible (lemme 2.5).

- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur au égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n-11)$-demi-reconstructible.

Dans la suite $k = 6$, donc les relations $R, R^\star$ et R' sont deux à deux (≤ 5)-hypomorphes. Soit D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. D'après le corollaire 2.15 R/D est un tournoi sans diamant, de même le lemme 2.13 prouve que l'une des équivalences $D_{R/D,R'/D}$ ou $D_{R^\star/D,R'/D}$ possède au moins deux classes.

La preuve du théorème 3.1 utilise les résultats suivants :

Proposition 3.2. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 3.2 on a :

Corollaire 3.3. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. Si l'équivalence $D_{R^\star/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R^\star$.*

Dans la suite de la preuve de la proposition 3.2 C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme $k=6$, alors les relations R et R' sont (≤ 5)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.9 C est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives, la preuve de la proposition 3.2 utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.4. *i) Si C est différente de sa composante connexe, alors $R'/C \sim R/C$.*

ii) Si R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C$.

iii) Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. *i)* Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/C \sim R/C$.

ii) On suppose que C est une composante connexe de R. Comme $k=6$ et R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors d'après le corollaire 2.2 $R'/C \sim R/C$.

iii) Comme R/C est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$. □

Dans la suite on suppose que C et D sont deux composantes connexes non auto-duales de R qui sont des tournois sans diamant.

Lemme 3.5. *R'/D et R/D sont (≤ 6)-hypomorphes.*

Preuve. Puisque l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes et les relations R et R' sont (≤ 7)-hémimorphes, alors le i) du lemme 2.22 prouve que R'/D et R/D sont (≤ 6)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.1 $R'/D \sim R/D$. □

Lemme 3.6. *Si $\mid E-(C\cup D)\mid \geq 11$, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. Comme l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $C\cap D=\phi$. D'après le lemme 3.4, on peut supposer que C est une composante connexe de R et que R/C est un tournoi sans diamant non auto-dual, et par suite R/C est fortement connexe. Posons $H=R/(C\cup D)$. Soient $(a,b)\in C\times D$. Considérons les parties F de E contenant $\{a,b\}$ et telles que : $R/F\sim H$ ou $R/F\sim H^\star$. Il n'y en a pas d'autre que $C\cup D$ car $H=R/(C\cup D)$ admet deux composantes connexes C et D. Le nombre de parties F de E contenant $\{a,b\}$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, \{a, b\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $\{a, b\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R', H, \{a, b\}) = 1$). Il s'ensuit que $R'/(C \cup D) \sim H = R/(C \cup D)$ ou $R'/(C \cup D) \sim H^\star$. Comme C et D sont les composantes connexes de $R/(C \cup D)$ et $R'/D \sim R/D$, alors $R'/C \sim R/C$. □

Lemme 3.7. *Si* $\mid E - D \mid \geq 17$, *alors* $R/C \sim R'/C$.

Preuve. Si $\mid C \mid \leq 6$, alors le lemme 3.6 prouve que $R/C \sim R'/C$. Dans la suite $\mid C \mid \geq 7$. Soient A une partie de C de cardinal ≤ 6, $b \in D$ et $H = R/(A \cup D)$. Si R/A est auto-dual, on a trivialement l'isomorphisme entre R/A et R'/A. Dans La suite, R/A n'est pas auto-dual. On va distinguer les cas suivants :

c_1) Cas où R/C et R/D ne sont pas hémimorphes.

Considérons les parties F de E contenant $\{b\} \cup A$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^\star$. Il n'y en a pas d'autre que $A \cup D$, car $H = R/(A \cup D)$ admet deux composantes connexes A et D. Le nombre de parties F de E contenant $\{b\} \cup A$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, \{b\} \cup A) = 1$). D'après le lemme 2.7, $n(R', H, \{b\} \cup A) = 1$. Il s'ensuit que $R'/(A \cup D) \sim H$ ou $R'/(A \cup D) \sim H^\star$. Comme A et D sont les composantes connexes de $R/(A \cup D)$ et $R'/D \sim R/D$, alors $R'/A \sim R/A$.

c_2) Cas R/C et R/D sont hémimorphes.

Soit $x \in (C - A)$. Considérons alors les parties F de $E - \{x\}$ contenant $\{b\} \cup A$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^\star$. Il n'y en a pas d'autre que $A \cup D$ car A et D sont les composantes connexes de $H = R/(A \cup D)$. Le nombre de parties F de $E - \{x\}$ contenant $\{b\} \cup A$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R/(E - \{x\}), H, \{b\} \cup A) = 1$) . D'après le lemme 2.7, $n(R'/(E - \{x\}), H, \{b\} \cup A) = 1$). Il s'ensuit que $R'/(A \cup D) \sim H$ ou $R'/(A \cup D) \sim H^\star$. Comme A et D sont les composantes connexes de $H = R/(A \cup D)$ et $R'/D \sim R/D$, alors $R'/A \sim R/A$.

Dans les deux cas $R'/A \sim R/A$. Il s'ensuit que R/C et R'/C sont (≤ 6)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.1 $R/C \sim R'/C$. □

Lemme 3.8. *Si* $h \geq 1$ *et si* $\mid D \mid \geq 6 + h$, *alors il existe une partie* A *de* D *de cardinal* h *tel que* $R/(D - A)$ *et* $R'/(D - A)$ *sont isomorphes mais non anti-isomorphes.*

Preuve. Soit $h \geq 1$. Si pour toute partie A de D de cardinal h, $R^\star/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors $R^\star/D$ et R/D sont $(-h)$-hypomorphes et comme R/D et $R^\star/D$ sont (≤ 4)-hypomorphes et $\mid D \mid \geq 6+h$, alors $R^\star/D \sim R/D$ (lemme 2.8), ce qui est impossible. D'ou il existe $A \subset D$ tel que $R/(E-A)$ est non auto-dual. D'après le lemme 3.5 R/D et R'/D sont (≤ 6)-hypomorphes, alors $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont aussi (≤ 6)-hypomorphes, et par suite $R'/(D-A) \sim R/(D-A)$ (lemme 2.1). Il s'ensuit que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. $\square$

Lemme 3.9. *$R/C \sim R'/C$.*

Preuve. D'après le lemme 3.4 C et D sont deux composantes connexes de R qui sont deux tournois sans diamant. Posons $X = E-(C \cup D)$. D'après le lemme 3.6 on peut supposer que $\mid X \mid \leq 10$, de même d'après le lemme 3.7 on suppose que $\mid E-D \mid \leq 16$. Suivant le cardinal de C, on a :

Cas 1 Si $\mid C \mid \leq 6$.

Suivant le cardinal de X, on a :

c_1) $\mid X \mid = 10$. D'après le lemme 3.8 il existe une partie A de D de cardinal 1 tel que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E-A \cup X)$ sur $R'/(E-A \cup X)$. Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D-A) \sim R/(D-A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$. Si f est un anti-isomorphisme. Comme C est connexe, alors d'après le lemme 2.3 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. Si $R'/C \sim R^\star/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D-A) \sim R^\star/(D-A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

c_2) $\mid X \mid \leq 9$. D'après le lemme 3.8 il existe une partie A de D tel que $\mid X \mid + \mid A \mid = 11$ et ($R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$) sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Nous montrons comme dans le cas c_1 que $R/C \sim R'/C$.

Cas 2 Si $\mid C \mid \geq 7$.

Soient J une partie de C de cardinal h tel que $\mid C \mid -h = 6$. D'après le lemme 3.8 il existe une partie A de D telle que $\mid A \mid + \mid J \mid + \mid X \mid = 11$ et $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E-A \cup X \cup J)$ sur $R'/(E-A \cup X \cup J)$.

- Si f est un isomorphisme. Comme $R'/(D-A) \sim R/(D-A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R'/(C-J) \sim R/(C-J)$.

- Si f est un anti-isomorphisme. Comme $\mid (C-J) \mid = 6$, alors $R'/(C-J) \sim R/(C-J)$ ou $R'/(C-J) \sim R^\star/(C-J)$. Si $R'/(C-J) \sim R^\star/(C-J)$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D-A) \sim R^\star/(D-A)$ ce qui est impossible. Donc $R'/(C-J) \sim R/(C-J)$.

Dans les deux cas $R'/(C-J) \sim R/(C-J)$. Les restrictions R/C et R'/C sont donc $(4,-h)$-hypomorphes et $\mid C \mid -h = 6$. Il s'ensuit que

$R/C \sim R'/C$ (lemme 2.8). □

Optimalité de la valeur 23 **du théorème 3.1**.

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple, prouvant l'optimalité de la valeur 23 du théorème 3.1. On considère : La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout i, T_i est une i-chaine. Avec ces notations on peut voir que les relations :

$R = S(R_1, R_1, T_{10})$ et $R' = S(R_1, R^{\star}{}_1, T_{10})$ (où S est une relation vide à 3 éléments) sont (-11)-hémimorphes, sans être hémimorphes sur un ensemble de cardinal 22.

4. La (-10)-demi-reconstructibilité des relations binaires finies

Théorème 4.1. . *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 22$ sont $(n-10)$-demi-reconstructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n-10)$-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 22 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 10)-hémimorphes. On a :

-Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n-10)$-demi-reconstructible.

- Si $2 \leq k \leq 4$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 10-demi-reconstructible et par suite R est $(n-10)$-demi-reconstructible (lemme 2.5).
- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur au égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n-10)$-demi-reconstructible.

Dans la suite $k \in \{5, 6\}$ donc les relations $R, R^{\star}$ et R' sont deux à deux (≤ 4)-hypomorphes. Soit D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. D'après le $i)$ du corollaire 2.16 R/D est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$, de même le lemme 2.13 prouve que l'une des équivalences $D_{R/D,R'/D}$ ou $D_{R^{\star}/D,R'/D}$ possède au moins deux classes.

La preuve du théorème 3.1 utilise les résultats suivants :

Proposition 4.2. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 4.2 on a :

Corollaire 4.3. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. Si l'équivalence $D_{R^\star/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R^\star$.*

Dans la suite de la preuve de la proposition 4.2 C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme $k \in \{5,6\}$, alors les relations R et R' sont (≤ 4)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.9 C est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives, la preuve de la proposition 4.2 utilise les lemmes suivants :

Lemme 4.4. *i) Si C est différente de sa composante connexe, alors $R'/C \sim R/C$.*

ii) Si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C$.

iii) Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. i)Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/C \sim R/C$.

ii) On suppose que C est une composante connexe de R. Comme $k \in \{5,6\}$ et R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors d'après le lemme 2.10 $R'/C \sim R/C$.

iii) Comme R/C est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$. □

Dans la suite on suppose que C et D sont deux composantes connexes non auto-duales de R qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$.

Lemme 4.5. *Si $\mid E - (C \cup D) \mid \geq 10$, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.6. □

Lemme 4.6. *Si $\mid E - D \mid \geq 16$, alors $R/C \sim R'/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.7. □

Lemme 4.7. *$R/C \sim R'/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.9. □

Optimalité de la valeur 22 du théorème 4.1.

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple, prouvant l'optimalité de la valeur 22 du théorème 4.1. On considère : La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout i, T_i est une i-chaîne. Avec ces notations on peut voir que les relations :

$R = S(R_1, R_1, T_9)$ et $R' = S(R_1, R^{\star}{}_1, T_9)$ (S est une relation vide a 3 éléments) sont (-10)-hémimorphes, sans être hémimorphes sur un ensemble de cardinal 21.

5. La (-9)-demi-reconstructibilité des relations binaires finies.

Théorème 5.1. *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 21$ sont $(n-9)$-demi-reconstructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n-9)$-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 21 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, et I_0 la base d'une de ces restrictions. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 9)-hémimorphes. On a :

- Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n-9)$-demi-reconstructible.

- Si $2 \leq k \leq 3$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 9-demi-reconstructible et par suite R est $(n-9)$-demi-reconstructible (lemme 2.5).

- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n-9)$-demi-reconstructible.

- Si $k \in \{5, 6\}$, alors les relations $R, R^{\star}$ et R' sont deux à deux (≤ 4)-hypomorphes. Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R, nous montrons comme dans la proposition 3.2 que si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ (resp. $D_{R^{\star}/D,R'/D}$) possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^{\star}$).

Dans la suite $k = 4$, donc les relations $R, R^{\star}$ et R' sont deux à deux (≤ 3)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.9 toute classe C de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

La preuve du théorème 5.1 utilise les résultats suivants :

Proposition 5.2. *Si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R' \sim R$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 5.2 on a :

Corollaire 5.3. *Si $R'/I_0 \sim R^\star/I_0$, alors $R' \sim R^\star$.*

Dans la suite de la preuve de la proposition 5.2, C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, la preuve utilise les lemmes suivants :

Lemme 5.4. *i) Si C est différente de sa composante connexe, alors $R'/C \sim R/C$.*

ii) Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. i) Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/C \sim R/C$.

ii)Comme R/C est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$. $\square$

Dans la suite on suppose C est une composante connexe non auto-duale de R.

Lemme 5.5. *$I_0 \cap C = \phi$.*

Preuve. Puisque R/I_0 n'est pas un drapeau, et $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors d'après le i) du lemme 2.21 $I_0 \cap C = \phi$. $\square$

Lemme 5.6. *i) R/C et R'/C sont (≤ 5)-hypomorphes.*

ii) Si R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. i) Comme R et R' sont (≤ 9)-hémimorphes et $R'/I_0 \sim R/I_0$, et $\mid I_0 \mid= 4$, alors le lemme 2.13 prouve que R'/C et R/C sont (≤ 5)-hypomorphes.

ii) Puisque R'/C et R/C sont (≤ 5)-hypomorphes, alors le lemme 2.10 de G. Lopez et C. Rauzy nous donne la forme de R/C et de R'/C, d'après la forme si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C$. Dans le cas où R/C est un élément de $E(S_n)$, le lemme 2.14 prouve que $R'/C \sim R/C$. Il s'ensuit que si R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C$. $\square$

Lemme 5.7. *Si $\mid E - (C \cup I_0) \mid \geq 9$, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. D'après le lemme 5.4 on suppose que C est une composante connexe non auto-duale de R, de même d'après le lemme 5.6 on suppose que R/C est un tournoi sans diamant, et par suite R/C est fortement connexe. Soient $H = R/(I_0 \cup C)$, et $a \in C$. Considérons alors les parties F de E contenant $I_0 \cup \{a\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^\star$. Il n'y en a pas d'autre que $I_0 \cup C$ car I_0 et C sont les composantes connexes de $H = R/(I_0 \cup C)$. Le nombre de parties F de E contenant $I_0 \cup \{a\}$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, I_0 \cup \{a\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $I_0 \cup \{a\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R', H, I_0 \cup \{a\}) = 1$). Il s'ensuit que $R'/(C \cup I_0) \sim H$ ou $R'/(C \cup I_0) \sim H^\star$. Comme $R/(C \cup I_0)$ admet deux composantes connexes I_0 et C, et $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R/C \sim R'/C$. □

Lemme 5.8. *$R'/C \sim R/C$.*

Preuve. D'après le lemme 2.17, on peut supposer que R/C est un tournoi sans diamant. Posons $X = E - (C \cup I_0)$, suivant le cardinal de x, on les cas suivants :

- c_1 Si $\mid X \mid \geq 9$, alors le lemme 3.4 prouve que $R/C \sim R'/C$.
- c_2 Si $\mid X \mid = 8$. Soit J une partie de C de cardinal 1. Comme R/C est un tournoi sans diamant, alors $R/(C - J)$ est soit fortement connexe, soit une chaîne. Si $R/(C - J)$ est une chaîne, alors $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$. Dans la suite $R/(C - J)$ est un tournoi sans diamant fortement connexe. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - X \cup J)$ sur $R'/(E - X \cup J)$. Comme $R/(E - X \cup J)$ admet deux composantes connexes I_0 et $C - J$ et $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors f est un isomorphisme avec $f(I_0) = I_0$ et $f(C - J) = C - J$. Il s'ensuit que $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$. Donc R/C et R'/C sont $(4, -1)$-hypomorphes et $\mid C \mid \geq 7$, et par suite d'après le lemme 2.8 $R/C \sim R'/C$.
- c_3 Si $\mid X \mid = 7$. Soit J une partie de C de cardinal 2. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$. Donc R/C et R'/C sont $(4, -2)$-hypomorphes et $\mid C \mid \geq 8$, et par suite d'après le lemme 2.8 $R'/C \sim R/C$.
- c_4 Si $\mid X \mid \leq 6$. Soit J une partie de C de cardinal h tel que $h + \mid X \mid = 9$. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R'/(C - J) \sim R/(C - J)$. Donc R/C et R'/C sont $(4, -h)$-hypomorphes et $\mid C \mid \geq 6 + h$, et par suite d'après le lemme 2.8 $R'/C \sim R/C$. □

Optimalité de la valeur 21 du théorème 5.1.

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple, prouvant l'optimalité de la valeur 21 du théorème 5.1. On considère : La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout i, T_i est une i-chaîne. Avec ces notations on peut voir que les relations :

$R = S(R_1, R_1, T_8)$ et $R' = S(R_1, R^{\star}{}_1, T_8)$ (où S est une relation vide à 3 éléments) sont (-9)-hémimorphes, sans être hémimorphes sur un ensemble de cardinal 20.

6. La (-8)-demi-reconstructibilité des relations binaires finies.

Théorème 6.1. *Les relations binaires finies de cardinal* $n \geq 20$ *sont* $(n-8)$*-demi-reconstructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n-8)$-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 20 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, et I_0 la base d'une de ces restrictions. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 8)-hémimorphes. On a :

-Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n-8)$-demi-reconstructible.

- Si $k = 2$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 8-demi-reconstructible et par suite R est $(n-8)$-demi-reconstructible (lemme 2.5).

- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur au égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n-8)$-demi-reconstructible.

- Si $k \in \{5, 6\}$, alors les relations $R, R^{\star}$ et R' sont deux à deux (≤ 4)-hypomorphes. Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R, nous montrons comme dans la proposition 3.2 que si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ (resp. $D_{R^{\star}/D,R'/D}$) possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^{\star}$).

- Si $k = 4$. Nous montrons comme dans la proposition 5.2 que si $R'/I_0 \sim R/I_0$ (resp. $R'/I_0 \sim R^{\star}/I_0$), alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^{\star}$).

Dans la suite $k = 3$.

La preuve du théorème 6.1 utilise la proposition suivante :

Proposition 6.2. *Si* $R'/I_0 \sim R/I_0$*, alors* $R \sim R'$*.*

Notons que comme conséquence de la proposition 6.2 on a :

Corollaire 6.3. *Si $R'/I_0 \sim R^\star/I_0$, alors $R' \sim R^\star$.*

Preuve de la proposition 6.2 Soit C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors d'après le lemme 2.21, $I_0 \cap C = \phi$ ou $I_0 \cap C = \{c\}$ avec R/I_0 est un drapeau, d'arête neutre $\{c,a\}$ et $\{c,b\}$.

i) Si $I_0 \cap C = \phi$, nous montrons comme dans la proposition 5.2 que si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R/C \sim R'/C$.

ii) Si R/I_0 est un drapeau, d'arête neutre $\{c,a\}$ et $\{c,b\}$ et $I_0 \cap C = \{c\}$, alors le ii) du lemme 2.21 prouve que R/C et R'/C sont (≤ 6)-hypomorphes, et par suite $R'/C \sim R/C$ (d'après le lemme 2.1).

Optimalité de la valeur 20 du théorème 6.1.

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple, prouvant l'optimalité de la valeur 20 du théorème 6.1. On considère : La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1,2,3\}$ et pour tout i, T_i est une i-chaîne. Avec ces notations on peut voir que les relations :

$R = S(R_1, R_1, T_7)$ et $R' = S(R_1, {R^\star}_1, T_7)$ (où S est une relation vide à 3 éléments) sont (-8)-hémimorphes, sans être hémimorphes sur un ensemble de cardinal 19.

7. La (-7)-demi-reconstructibilité des relations binaires finies.

Théorème 7.1. *Les relations binaires finies de cardinal $n \geq 25$ sont $(n-7)$-demi-reconstructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n-7)$-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 25 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, et I_0 la base d'une de ces restrictions. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 7)-hémimorphes. On a :

- Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n-7)$-demi-reconstructible.

- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est $(n-7)$-demi-reconstructible.

- Si $k \in \{5,6\}$, alors les relations $R, R^\star$ et R' sont deux à deux (≤ 4)-hypomorphes. Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R, nous montrons comme dans la proposition 3.2 que si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ (resp. $D_{R^\star/D,R'/D}$) possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$ (resp. $R' \sim R^\star$).

- Si $k \in \{2,3\}$. Nous montrons comme dans la proposition 5.2 que si $R'/I_0 \sim R/I_0$ (resp. $R'/I_0 \sim R^\star/I_0$), alors $R' \sim R$ (resp.$R' \sim R^\star$).

Dans la suite $k = 4$, donc les relations $R, R^\star$ et R' sont deux à deux (≤ 3)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.9 toute classe C de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

La preuve du théorème 7.1 se base sur la proposition suivante :

Proposition 7.2. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 7.2 on a :

Corollaire 7.3. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. Si l'équivalence $D_{R^\star/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R^\star$.*

Dans la suite de la preuve de la proposition 7.2, C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, la preuve utilise les lemmes suivants :

Lemme 7.4. *$i)$ Si C est différente de sa composante connexe, alors $R'/C \sim R/C$.*
$ii)$ Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve. $i)$ Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/C \sim R/C$.
$ii)$ Comme R/C est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. Si R/C est auto-dual, alors $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$.
□

Dans la suite C est une composante connexe non auto-duale de R.

Lemme 7.5. *Si $\mid E - (C \cup D) \mid \geq 7$, alors $R/C \sim R'/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.6. □

Lemme 7.6. *Si $\mid E - D \mid \geq 13$, alors $R/C \sim R'/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.7. □

Lemme 7.7. *Si $h \geq 4$ et si $\mid D \mid \geq 6+h$, alors il existe une partie A de D de cardinal h tel que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes.*

Preuve. Soit $h \geq 4$. Si pour toute partie A de D de cardinal h, $R^\star/(D-A) \sim R/(D-A)$, alors $R^\star/D$ et R/D sont $(-h)$-hypomorphes et $\mid D \mid \geq 6+h$, alors $R^\star/D \sim R/D$ (lemme 2.8), ce qui est impossible. D'ou il existe $A \subset D$ telle que $R/(E-A)$ est non auto-dual. D'après le $i)$ du lemme 2.22 R/D et R'/D sont (≤ 6)-hypomorphes, alors $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont aussi (≤ 6)-hypomorphes, et par suite $R'/(D-A) \sim R/(D-A)$ (lemme 2.1). Il s'ensuit que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. □

Lemme 7.8. *$R/C \sim R'/C$.*

Preuve. Posons $X = E-(C \cup D)$. D'après le lemme 7.5 on peut supposer que $\mid X \mid \leq 6$, de même d'après le lemme 7.6 on suppose que $\mid E-D \mid \leq 12$, et par suite $\mid C \mid \leq 12$. Suivant le cardinal de X, on a :

c_1) $\mid X \mid = 0$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 7 telle que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E-A)$ sur $R'/(E-A)$.

- Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D-A) \sim R/(D-A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si f est un anti-isomorphisme. Comme C est connexe, alors d'après le lemme 2.3 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. Si $R'/C \sim R^\star/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D-A) \sim R^\star/(D-A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

c_2) $\mid X \mid = 1$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 6 tel que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E-A \cup X)$ sur $R'/(E-A \cup X)$.

- Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D-A) \sim R/(D-A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si f est un anti-isomorphisme. Comme C est connexe, alors d'après le lemme 2.3 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. Si $R'/C \sim R^\star/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D-A) \sim R^\star/(D-A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

c_3) $\mid X \mid = 2$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 5 telle que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E-A \cup X)$ sur $R'/(E-A \cup X)$. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R/C \sim R'/C$.

c_4) $\mid X \mid = 3$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 4 telle que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E-A\cup X)$ sur $R'/(E-A\cup X)$. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R/C \sim R'/C$.

c_5) $4 \leq\mid X \mid\leq 6$. D'après le lemme 7.7 il existe une partie A de D de cardinal 4 telle que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soient B une partie de X de cardinal 3 et f un hémimorphisme de $R/(E-A\cup X\cup B)$ sur $R'/(E-A\cup X\cup B)$. Nous montrons comme dans le cas c_2 que $R/C \sim R'/C$. □

8. La (-6)-demi-reconstructibilité des relations binaires finies.

Théorème 8.1. *Les relations binaires finies de cardinal* $n \geq 23$ *sont* $(n-6)$*-demi-reconstructibles.*

Soient R et R' deux relations binaires $(n-6)$-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 23 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, I_0 la base d'une de ces restrictions, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Le lemme 2.5 prouve que les relations R et R' sont (≤ 6)-hémimorphes. On a :

-Si R est connexe, alors le lemme 2.2 prouve que R est $(n-6)$-demi-reconstructible.

- Si $k\geq 7$ ou $k=0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur au égal à 6, et par suite le lemme 2.1 prouve que R est $(n-6)$-demi-reconstructible.

- Si $k\in\{5,6\}$, alors les relations $R, R^\star$ et R' sont deux à deux (≤ 4)-hypomorphes. Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R, nous montrons comme dans la proposition 3.2 que si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ (resp. $D_{R^\star/D,R'/D}$) possède au moins deux classes, alors $R'\sim R$ (resp. $R'\sim R^\star$).

- Si $k\in\{2,3\}$, nous montrons comme dans la proposition 5.2 que si $R'/I_0\sim R/I_0$ (resp. $R'/I_0\sim R^\star/I_0$), alors $R'\sim R$ (resp. $R'\sim R^\star$).

Dans la suite $k=4$, donc les relations $R, R^\star$ et R' sont deux à deux (≤ 3)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.9 toute classe C de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

La preuve du théorème 8.1 se base sur la proposition suivante :

Proposition 8.2. *Soient C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, et D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R'/C \sim R/C$.*

Notons que comme conséquence de la proposition 8.2 on a :

Corollaire 8.3. *Soient D la plus grande composante connexe non auto-duale de R. Si l'équivalence $D_{R^\star/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors $R' \sim R^\star$.*

Dans la suite de la preuve de la proposition 8.2, C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, la preuve utilise les lemmes suivants :

Lemme 8.4. *Si $\mid E - C \mid \geq 6$, alors $R/C \sim R'/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$.*

Preuve. d'après le lemme 2.12 on suppose que C est une composante connexe de R. Soient $H = R/C$, et $a \in C$. Considérons alors les parties F de E contenant a et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^\star$. Comme C est une composante connexe de R, alors il n'y en a pas d'autre que C. Le nombre de parties F de E contenant a telle que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, \{a\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant a telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R', H, \{a\}) = 1$). Il s'ensuit que $R/C \sim R'/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. □

Lemme 8.5. *Si $\mid E - C \cup D \mid \geq 7$, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.6. □

Lemme 8.6. *Si $\mid E - D \mid \geq 12$, alors $R/C \sim R'/C$.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.7. □

Dans la suite $\mid E - D \mid \leq 11$, et par suite $\mid C \mid \leq 11$.

Lemme 8.7. *i) Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède une classe fortement connexe de cardinal ≥ 10, alors $R/C \sim R'/C$.*

ii) Si toute classe fortement connexe de l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ est de cardinal ≤ 9, alors R/D et R'/D sont (≤ 6)-hypomorphes.

Preuve. Soit K une classe de l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$. Puisque K est différente de D, alors il existe $x \in D - K$ tel que $R(x, K) \neq R(K, x)$.

Montrons que K est un tournoi sans diamant.

On va raisonner par l'absurde supposons qu'il existe une arête neutre $\{a, b\}$ de K. D'ou $R/\{x, a, b\}$ est un pic, ce qui est impossible, donc K est un tournoi. Comme $K \neq D$, alors le i) du lemme 2.22 prouve que R/K et R'/K sont (≤ 5)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.10 R/K est un tournoi sans diamant.

i) D'après le lemme 2.12 on suppose que C est une composante connexe de R et par suite $C \cap D = \phi$, de même d'après le lemme 8.6 on suppose que $\mid C \mid \leq 11$. Soient $H = R/(C \cup K \cup \{x\})$ et $Y = E - H$. On va distinguer les cas suivants :

c_1) Si $\mid Y \mid \geq 6$.

Soient a un point de C et b, c, d trois points de K, avec $R/\{b, c, d\}$ est un 3-cycle. Considérons alors les parties F de E contenant $\{x, a, b, c, d\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^\star$. Il n'y en a pas d'autre que $C \cup K \cup \{x\}$, car C et $K \cup \{x\}$ sont les composantes connexes de $H = R/(C \cup K \cup \{x\})$ et $\mid C \mid \leq \mid K \cup \{x\} \mid$. Le nombre de parties F de E contenant $\{x, a, b, c, d\}$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, \{x, a, b, c, d\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $\{x, a, b, c, d\}$ telle que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R', H, \{x, a, b, c, d\}) = 1$). Il s'ensuit que $R/C \sim R'/C$.

c_2) Si $\mid Y \mid = 5$.

Soient J une partie de K de cardinal 1 tel que $R/(K - J)$ est un tournoi sans diamant fortement connexe. Comme C et $\{x\} \cup K - J$ sont les composantes connexes de $R/(E - Y \cup J)$, et $R/(\{x\} \cup K - J) \sim R'/(\{x\} \cup K - J)$, alors $R'/(E - Y \cup J) \sim R/(E - Y \cup J)$, et par suite $R/C \sim R'/C$.

c_3) Si $\mid Y \mid = 4$.

Soient J une partie de K de cardinal 2 tel que $R/(K - J)$ est un tournoi sans diamant fortement connexe. Nous montrons comme dans c_2 que $R'/(E - Y \cup J) \sim R/(E - Y \cup J)$, et par suite $R/C \sim R'/C$.

c_4) Si $\mid Y \mid \leq 3$.

Soient J une partie de K tel que $\mid Y \mid + \mid J \mid = 6$ et $R/(K - J)$ est un tournoi sans diamant fortement connexe. Nous montrons comme dans c_2 que $R'/(E - Y \cup J) \sim R/(E - Y \cup J)$, et par suite $R/C \sim R'/C$.

ii) Si R/K est une chaîne, on a trivialement R/K et R'/K sont (≤ 6)-hypomorphes. Dans la suite on suppose que R/K est un tournoi sans diamant fortement connexe et $6 \leq \mid K \mid \leq 9$. Comme $K \neq D$, alors le i) du lemme 2.22 prouve que R/K et R'/K sont (≤ 5)-hypomorphes. Suivant le cardinal de K, on a :

c_1) Si $\mid K \mid= 6$. Comme K est différente de sa composante, alors le lemme 2.12 prouve que $R'/K \sim R/K$, d'autre part (R/K et R'/K) sont (≤ 5)-hypomorphes. Il s'ensuit que R/K et R'/K sont (≤ 6)-hypomorphes.

c_2) Si $\mid K \mid= 7$. Soient A une partie de K de cardinal 6 et $\{a\} = K - A$. Les relations $R/(E - \{a\})$ et $R'/(E - \{a\})$ sont (-5)-hémimorphes et A est différente de sa composante, alors le lemme 2.12 prouve que $R/A \sim R'/A$. Il s'ensuit que R/K et R'/K sont (≤ 6)-hypomorphes.

c_3) Si $\mid K \mid= 8$. Soient A une partie de K de cardinal 6 et $\{a, b\} = K - A$. Les relations $R/(E - \{a, b\})$ et $R'/(E - \{a, b\})$ sont (-4)-hémimorphes. Si R/A est une chaîne, on a $R/A \sim R'/A$. Si R/A est fortement connexe. Soient $H = R/(\{x\} \cup A)$, et $(y, z, t) \in A^3$ avec $R/\{y, z, t\}$ est un 3-cycle. Considérons alors les parties F de E contenant $\{x, y, z, t\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^\star$. Il n'y en a pas d'autre que $\{x\} \cup A$, car $\{x\}$ et A sont les composantes fortement connexes de $H = R/(\{x\} \cup A)$. Le nombre de parties F de E contenant $\{x, y, z, t\}$ telle que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R/(E-\{a, b\}), H, \{x, y, z, t\}) = 1$). D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $\{x, y, z, t\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R'/(E - \{a, b\}), H, \{x, y, z, t\}) = 1$). Il s'ensuit que $R'/A \sim R/A$, et par suite (R/K et R'/K) sont (≤ 6)-hypomorphes.

c_4) Si $\mid K \mid= 9$. Soient A une partie de K de cardinal 6 et $\{a, b, c\} = K - A$. Les relations $R/(E - \{a, b, c\})$ et $R'/(E - \{a, b, c\})$ sont (-3)-hémimorphes. Si R/A est une chaîne, on a $R/A \sim R'/A$. Si R/A est fortement connexe. Soient $H = R/(\{x\} \cup A)$, et $(y, z, t) \in A^3$ avec $R/\{y, z, t\}$ est un 3-cycle. Considérons alors les parties F de E contenant $\{x, y, z\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^\star$. Il n'y en a pas d'autre que $\{x\} \cup A$, car $\{x\}$ et A sont les composantes fortement connexes de $H = R/(\{x\} \cup A)$. Le nombre de parties F de E contenant $\{x, y, z\}$ telle que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R/(E-\{a, b, c\}), H, \{x, y, z\}) = 1$) . D'après le lemme 2.7, le nombre de parties F de E contenant $\{x, y, z\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R'/(E-\{a, b, c\}), H, \{x, y, z\}) = 1$). Il s'ensuit que $R'/A \sim R/A$, et par suite (R/K et R'/K) sont (≤ 6)-hypomorphes. □

Lemme 8.8. *Si $h \geq 4$ et $\mid D \mid\geq 6 + h$ et si (R/D et R'/D) sont (≤ 6)-hypomorphes, alors il existe une partie A de D de cardinal h tel que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 7.7. □

Lemme 8.9. $R/C \sim R'/C$.

Preuve. Posons $X = E - (C \cup D)$. D'après le lemme 8.5 on peut supposer que $\mid X \mid \leq 5$, de même d'après le lemme 8.6 on suppose que $\mid E - D \mid \leq 11$, et par suite $\mid C \mid \leq 11$, aussi d'après le lemme 8.7 on suppose que (R/D et R'/D) sont (≤ 6)-hypomorphes. Suivant le cardinal de X, on a :

c_1) $\mid X \mid = 0$. D'après le lemme 8.8 il existe une partie A de D de cardinal 6 telle que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - A)$ sur $R'/(E - A)$.

- Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si f est un anti-isomorphisme. D'après le lemme 8.4 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. Si $R'/C \sim R^\star/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D - A) \sim R^\star/(D - A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

c_2) $\mid X \mid = 1$. D'après le lemme 8.8 il existe une partie A de D de cardinal 5 telle que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E-A \cup X)$ sur $R'/(E-A \cup X)$.

- Si f est un isomorphisme, comme $R'/(D - A) \sim R/(D - A)$, alors le lemme 2.6 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si f est un anti-isomorphisme. D'après le lemme 8.4 $R'/C \sim R/C$ ou $R'/C \sim R^\star/C$. Si $R'/C \sim R^\star/C$, alors d'après le lemme 2.6 $R'/(D - A) \sim R^\star/(D - A)$, ce qui est impossible. Donc $R/C \sim R'/C$.

c_3) $\mid X \mid = 2$. D'après le lemme 8.8 il existe une partie A de D de cardinal 4 telle que $R/(D-A)$ et $R'/(D-A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soit f un hémimorphisme de $R/(E-A \cup X)$ sur $R'/(E-A \cup X)$. Nous montrons comme dans c_2 que $R/C \sim R'/C$.

c_4) $3 \leq \mid X \mid \leq 5$. D'après le lemme 8.8 il existe une partie A de D de cardinal 4 telle que $R/(D - A)$ et $R'/(D - A)$ sont isomorphes mais non anti-isomorphes. Soient B une partie de X de cardinal 2 et f un hémimorphisme de $R/(E - A \cup X \cup B)$ sur $R'/(E - A \cup X \cup B)$. Nous montrons comme dans c_2 que $R/C \sim R'/C$. □

References

[1] Y. BOUDABBOUS et J. DAMMAK : Sur la (-k)-demi- reconstructibilité des tournois finis, CRAS, Série I 326, pp. 1037-1040, (1998).

[2] A. BOUSSAIRI : Thèse de doctorat de mathématiques. Soutenue à l'Université Claude Bernard, le 12 Juin, (1995).

[3] J. DAMMAK : Caractérisation des relations binaires finies d-demi-reconstructibiles. Proyecciones, Volume 22, N 1, (2003).

[4] J. DAMMAK : La dualité dans la demi-reconstruction des relations binaires finies, CRAS, Série I 327, pp. 861-864, (1998).

[5] J. DAMMAK : La (-5)-demi-reconstructibilité des relations binaires connexes finies. Proyecciones, Volume 22, N 3, (2003).

[6] R. FRAÏSSÉ : L'intervalle en théorie des relations, in orders, descriptions and roles, M. Pouzet et D. Richard éd. North-Holland, pp. 313-342, (1984).

[7] C. GNANVO et P.ILLE : La reconstruction des tournois. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, série I, pp. 577-580, (1988).

[8] J. G. HAGENDORF et G. LOPEZ : La demi-reconstructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments. C. R. Acad. Sci. Paris, série I, 317, pp. 7-12, (1993).

[9] G. LOPEZ : L'indéformabilité des relations et multirelations binaires. Zeitschrift. Math. Logik Grundlagen Math. 24, pp. 303-317, (1978).

[10] G. LOPEZ et C. RAUZY : Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2,3,4 and (n-1), I. Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. 38, S. 27-37, (1992).

[11] G. LOPEZ et C. RAUZY : Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2,3,4 and (n-1), II. Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd 38, S. 157-168, (1992).

[12] M. POUZET : Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. Math. Zeitschr. 150, pp. 117-134, (1976).

Received : April, 2003.

Jamel Dammak
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Sfax
Université Claude Bernard Lyon 1
B. P. 802, 3018 Sfax
Tunisie
e-mail : jdammak@yahoo.fr