Proyecciones
Vol. 22, N^o 3, pp. 181-199, December 2003.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile

LA (-5)-DEMI-RECONSTRUCTIBILITÉ DES RELATIONS BINAIRES CONNEXES FINIES

JAMEL DAMMAK
Université Claude Bernard Lyon 1, Tunisie.

Abstract

Etant donnée une relation binaire R, de base E, on définit sa duale R^* par $R^*(x,y) = R(y,x)$. La relation R est dite auto-duale si elle est isomorphe à R^*. Une relation binaire R' est hémimorphe à R, si elle est isomorphe à R ou à R^*. Une relation binaire est d-demi-reconstructible, si elle est déterminée par la donnée de ses restrictions de cardinal d, à l'hémimorphie près. Dans ce papier, nous montrons que : Les relations binaires connexes finies de cardinal $n \geq 12$ sont $(n-5)$-demi-reconstructibles.

Given a binary relation R of basis E, we define its dual R^* by $R^*(x,y) = R(y,x)$. A relation R is self-dual if it is isomorphic to R^*. A binary relation R' is hemimorphic to R, if it is isomorphic to R or to R^*. A binary relation R is d-half-reconstructible if it is determined by its restrictions of cardinality d, up to hemimorphism. In this paper we obtain : The finite connected binary relations of cardinality $n \geq 12$ are $(n-5)$-half -reconstructible.

Mathematics Subject Classification : *03C60; 04A05; 05C20; 05C38; 05C40.*

Key Words : *Relation de différence, Relation binaire, Graphe, Hypomorphe, Hémimorphe, Reconstruction, Connexe.*

1. Introduction

Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est noté $\mid E \mid$. Une relation binaire R de base E est une application du produit $E \times E$ dans $\{+,-\}$. Les éléments de E sont appelés sommets de R. Les paires de sommets sont appelées arêtes de R. Une arête $\{a,b\}$ est dite neutre si $R(a,b)=R(b,a)$, elle est dite pleine (resp. vide) si $R(a,b)=R(b,a)=+$ (resp. $R(a,b)=R(b,a)=-$). Une arête de R est dite orientée, si elle n'est pas neutre, dans ce cas on dit que a *domine* b si $R(a,b)=+$. On appelle duale de R, la relation $R^\star$ définie sur E par : pour tous éléments $x,y \in E$, $R^\star(x,y)=R(y,x)$. La relation R est dite auto-duale si elle est isomorphe à $R^\star$. L'isomorphie entre deux relations R et R' est notée $R \sim R'$. Une relation binaire T est un tournoi lorsque pour tout élément $x \in E$, $T(x,x)=-$ et pour tous éléments distincts $x,y \in E$, $T(x,y) \neq T(y,x)$. Un 3-cycle (a,b,c) est un tournoi T à 3 éléments défini par $T(a,b)=T(b,c)=T(c,a)=+$. Une k-chaîne est un ordre total irréflexif à k éléments. La restriction de R à une partie X de E, notée R/X, est la relation de base X définie par : pour tous éléments x,y de X, $R/X(x,y)=R(x,y)$.

Une relation R de base finie E est dite *connexe*, si pour tous éléments distincts x,y de E, il existe une suite $x_0=x,x_1,...,x_k=y$, telle que pour tout $i=0,1,...,k-1$, on a $R(x_i,x_{i+1}) \neq R(x_{i+1},x_i)$.

Soient R et R' deux relations binaires de bases respectives E et E', et f une bijection de E sur E'. L'application f est dite un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) de R sur R', si pour tous x,y éléments de E, $R'(f(x),f(y))=R(x,y)$ (resp. $R'(f(x),f(y))=R^\star(x,y)$). Dans ce cas on dit que R et R' sont isomorphes et on note $R' \sim R$ (resp. R et R' sont anti-isomorphes et on note $R' \sim R^\star$). Une relation binaire R' est hémimorphe à R, si elle est isomorphe à R ou à $R^\star$. Une relation binaire R est dite auto-duale si elle est isomorphe à $R^\star$. Une relation binaire est dite non auto-duale minimale, si elle est non auto-duale et si toutes ses restrictions strictes sont auto-duales. Une relation binaire H s'abrite dans R si H est isomorphe à une restriction de R. Une restriction R/A s'inverse dans R' si $R'/A=R^\star/A$. Deux relations binaires R et R' de base commune E de cardinal n sont dites k-hémimorphes (resp. k-hypomorphes) lorsque pour toute partie X de E de cardinal k, $R'/X \sim R/X$ ou $R'/X \sim R^\star/X$ (resp. $R'/X \sim R/X$); définition analogue lorsque $card(X) \leq k$, on remplace alors le préfixe (k) par $(\leq k)$ dans les notations. La $(n-k)$-hémimorphie (resp. $(n-k)$-hypomorphie) est encore notée $(-k)$-hémimorphie (resp. $(-k)$-hypomorphie). Une relation R est dite k-demi-reconstructible (resp.

k-reconstructible) si toute relation k-hémimorphe (resp. k-hypomorphe) à R, lui est hémimorphe (resp. isomorphe); définition analogue pour la $(\leq k)$-demi-reconstructibilité (resp. $(\leq k)$-reconstructibilité), et aussi de la $(-k)$-demi-reconstruction (resp. $(-k)$-reconstruction).

La problématique de la reconstruction remonte à ULAM (1954). Elle est l'ensemble des questions évoquant la possibilité ou l'impossibilité de déterminer une structure à un isomorphisme près, au moyen d'une collection de sous structures, données elles aussi à un isomorphisme près. Rappelons dans ce domaine le résultat de G.LOPEZ concernant un problème posé par R. FRAÏSSÉ dans les années soixante:

Lemme 1.1. *[8] Les relations binaires finies sont* (≤ 6)*-reconstructibles.*

Notre présent travail, quant à lui, porte sur la demi-reconstruction, problématique due à J. G. HAGENDORF (1992). Il définit la notion d'hémimorphie (voir plus haut) et pose deux problèmes. Le premier est l'analogue du problème de R. FRAÏSSÉ : Existe-t-il un entier h tel que deux relations binaires R et R' de même base finie E de cardinal $> h$ sont hémimorphes dès que leurs restrictions à chaque partie F d'au plus h éléments sont hémimorphes.

Le second l'analogue du problème d'ULAM-POUZET : Existe-t-il un entier h minimum tel que deux relations de cardinal n, sont hémimorphes dès que leurs restrictions de cardinal $n-h$ sont hémimorphes pour n assez grand.

La réponse au premier problème a été donnée par J. G. HAGENDORF et G. LOPEZ avec :

Lemme 1.2. *[7] Les relations binaires finies sont* (≤ 12)*-demi-reconstructibles.*

Dans le cas des relations binaires connexes ce seuil a été abaissé dans [3] :

Lemme 1.3. *[3] Les relations binaires connexes finies sont* (≤ 7)*-demi-reconstructibles.*

De chacun de ces résultats découle immédiatement, grâce à un théorème combinatoire de POUZET [11] les résultats suivants :

Lemme 1.4. *Les relations binaires finies sont* $(n-12)$*-demi-reconstructibiles pour* $n \geq 24$.

Lemme 1.5. *Les relations binaires connexes finies sont* $(n-7)$*-demi - reconstructibles pour* $n \geq 14$.

En fait le théorème de POUZET [11] permet de relier la demi-reconstruc tion dite par le bas quand n est assez grand (lemmes 1.2 et 1.3) avec la demi-reconstruction par le haut (lemmes 1.4 et 1.5) Dans ce papier on obtient une amélioration du lemme 1.5 avec les théorèmes suivants :

Théorème 3.1 *Les relations binaires connexes finies de cardinal* $n \geq 13$ *sont* $(n-6)$*-demi-reconstructibles.*

Théorème 4.1 *Les relations binaires connexes finies de cardinal* $n \geq 12$ *sont* $(n-5)$*-demi-reconstructibles.*

On obtient en fait un résultat plus fort, à savoir :

Théorème 5.1 *Pour tout entier* $d \geq 5$*, les relations binaires connexes finies de cardinal* $n \geq 7+d$ *sont* $(n-d)$*-demi-reconstructibles.*

On montre de plus, à l'aide d'un contre-exemple, que le nombre $7+d$ du théorème 5.1 est optimal.

Esquisse de la preuve du théorème 3.1

La démarache est sensiblement la même pour les autres théorèmes de demi-recontruction. Soient R une relation binaire connexe finie de base E de cardinal au moins égal à 13, et R' une relation binaire $(n-6)$-hémimorphe à R. D'après [11] les relations R et R' sont (≤ 6)-hémimorphes. D'après [3] si l'équivalence $D_{R,R'}$ possède au moins deux classes, alors toute classe C est un intervalle de R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives de plus R'/C et R/C sont (≤ 5)-hypomorphes, et par suite le théorème de G. Lopez et C. Rauzy (voir [9]) nous donne la forme de R/C et de R'/C, d'après la forme si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C$. D'autre part d'après [4] si R/C est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C$. Il s'ensuit que si R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C$. Dans la suite on suppose que R/C est un tournoi sans diamant fortement connexe. Dans le cas où $\mid E-C \mid \geq 7$, nous montrons que $R'/C \sim R/C$ en utilisant une lemme combinatoire faite dans [1]. Dans le cas où $\mid E-C \mid \leq 5$, en nous basant sur les théorèmes faite dans [10] nous montrons que $R'/C \sim R/C$. Il s'ensuit que $R' \sim R$. De même $R' \sim R^\star$ si l'équivalence $D_{R^\star,R'}$ possède au moins deux classes. Si chacune des équivalences $D_{R,R'}$ et $D_{R^\star,R'}$ possède une seule classe, nous montrons que R' et R sont des chaînes, et par suite $R' \sim R \sim R^\star$.

2. Définitions. Notations. Rappels.

Somme lexicographique. Etant donnée une relation S de base $I = \{1, ..., k\}$, associons à chaque $i \in I$, une relation R_i de base I_i de telle sorte que les bases I_i soient deux à deux disjointes. La S-somme des R_i, notée $S(R_1, ..., R_k)$, est la relation définie sur la réunion des I_i de la façon suivante : $S(R_1, ..., R_k)(x, y) = R_i(x, y)$ si $x, y \in I_i$ et $S(R_1, ..., R_k)(x, y) = S(i, j)$ si $x \in I_i$ et $y \in I_j$ et $i \neq j$. Nous dirons aussi que la S-somme des R_i, est obtenue à partir de la relation S en dilatant chaque $i \in I$ par la relation R_i.

Relations particulières. Citons les relations irréflexives particulières suivantes :

- Une *presque-chaîne* de longueur k est obtenue à partir d'une k-chaîne en rendant neutre l'arête liant son premier et son dernier élément. Une presque-chaîne de longueur 3 est dite aussi une 3-consécutivité.

- Un *pic* est une relation à 3 éléments a, b et c telle que l'arête $\{a, b\}$ est neutre et les arêtes $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ sont orientées avec $R(a, c) = R(b, c)$. Le point c est dit sommet du pic.

- Un *drapeau* est une relation à 3 éléments a, b et c telle que l'arête $\{a, b\}$ est orientée, l'arête $\{b, c\}$ est pleine et l'arête $\{a, c\}$ est vide.

-Un *diamant* positif (resp. négatif) est un tournoi à 4 sommets constitué d'un 3-cycle (a, b, c) et d'un point d dominé par (resp. dominant) (a, b, c). Le point d est dit sommet du diamant.

- Etant donné un entier h, T_h est le tournoi à $2h+1$ sommets : $0, 1, ..., 2h$ tel que pour tout sommet i, $T_h(i, i + k) = +$ pour $k \in \{1, ..., h\}$, (l'entier $i + k$ étant considéré modulo $2h + 1$). Une relation R est un élément de $D(T_h)$, si R est un tournoi obtenu en dilatant chaque sommet k de T_h par une chaîne p_k de cardinal fini. Rappelons que $D(T_h)$ est la classe des tournois finis sans diamant ([6], [9]).

- Soient un entier naturel $h \geq 3$ et l'ensemble $F = \{1, ..., h\}$.

* On appelle consécutivité $1 < 2 < ... < h$, l'une des quatre relations définies sur F comme suit :

$[R_1(x, y) = + \ ssi \ (y = x+1)]$, $[R_2(x, y) = + \ ssi \ (y = x+1 \ ou \ y = x)]$, $[R_3(x, y) = + \ ssi \ (y = x + 1 \ ou \ |y - x| > 1)]$, $[R_4(x, y) = + \ ssi \ (y = x + 1 \ ou \ |y - x| \neq 1)]$.

* On appelle cycle $1 < 2 < ... < h < 1$, l'une des quatre relations définies sur F comme suit : pour toute consécutivité R_i, $(1 \leq i \leq 4)$, le cycle R'_i coïncide avec R_i, sauf peut être sur les couples $(1, h)$ et $(h, 1)$ où

on a $R'_i(h,1)=+$ et $R'_i(1,h)=-$.

- Etant donné un entier $n \geq 1$, on désigne par S_n, l'une des relations définies sur les $2n$ éléments $t_1,...,t_{2n}$, par : $S_n(t_i,t_{i+n})=S_n(t_{i+n},t_i)$ pour $i=1,...,n$, $S_n(t_i,t_{i+k})=-S_n(t_{i+k},t_i)=+$ pour $k=1,...,n-1$ et pour $i=1,...,2n$ (les entiers ici sont considérés modulo $2n$). On notera δ_n un élément de la famille $E(S_n)$, des extensions de S_n obtenues en augmentant la base de S_n d'ensembles (éventuellement vides) deux à deux disjoints $s_1,...,s_{2n}$, appelés secteurs de la relation, tels que :

i) Pour tout i, $\delta_n/s_i \cup \{t_i,t_{i+1}\}$ est une chaîne de premier élément t_i et de dernier élément t_{i+1}.

ii) Pour tout i, on a $\delta_n/s_i \cup s_{i+n}$ est un tournoi sans diamant.

iii) Pour tout i, pour tout x de s_i, pour tout y de s_{i+j}, $(j=1,...,n-1)$, on a $\delta_n(x,y)=-$, $\delta_n(y,x)=+$, $\delta_n(t_i,y)=-\delta_n(y,t_i)=+$, et pour tout y de s_{i+j}, $(j=n,...,2n-1)$, on a $\delta_n(t_i,y)\neq\delta_n(y,t_i)=-$.

Intervalle, Décomposabililité. La notion suivante d'intervalle d'une relation binaire a été introduite par R. Fraïssé en [5]. Etant donnée une relation binaire R de base E, une partie I de E est un R-intervalle, lorsque pour tous éléments $a,b \in I$, tels que $R(a,a)=R(b,b)$, et pour tout élément $x \in E-I$, on a $R(a,x)=R(b,x)$ et $R(x,a)=R(x,b)$. Clairement, l'ensemble vide, les singletons et l'ensemble E sont des intervalles de R, appelés intervalles triviaux. Une relation ayant au moins trois sommets sera dite *indécomposable* lorsque tous ses intervalles sont triviaux, elle est dit *décomposable* dans le cas contraire. Si I et J sont deux R-intervalles, la valeur $R(a,b)$ est une constante quand a (resp. b) décrit l'ensemble I (resp. J) et on note $R(I,J)$ cette constante.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.1. *[11]. Soient R et R' deux relations binaires de même base E de cardinal fini n. Si R et R' sont q-hémimorphes (resp. q-hypomorphes) où $1 \leq q \leq n-1$, alors pour tout entier $p \leq min(q,n-q)$, R et R' sont p-hémimorphes (resp. p-hypomorphes).*

Lemme 2.2. *[1]. Soient n,d et h des entiers naturels avec $1 \leq d \leq n-1$ et $1 \leq h \leq n-d$, H une relation binaire à h sommets, et R et R' deux relations binaires $(n-d)$-hémimorphes et de base commune E à n éléments. Alors, pour toute partie A de E à au plus d éléments, le nombre de parties F de E contenant A telle que R/F est hémimorphe à H, est égal au nombre de parties F de E contenant A telle que R'/F est hémimorphe à H.*

Notation. Dans la suite, on utilisera les notations suivantes (faites sous les hypothèses du lemme 2.2) $n(R, H, A) = card\{F \subset E : A \subset F et R/F \sim H ou R/F \sim H^{\star}\}$.

$n(R', H, A) = card\{F \subset E : A \subset F et R'/F \sim H ou R'/F \sim H^{\star}\}$.

Sous ces notations, le lemme 2.2 dit que : $n(R, H, A) = n(R', H, A)$.

Relation de différence. La notion de relation de différence a été introduite par G. Lopez dans [8]. Soient deux relations binaires R et R' de même base E, qui sont (≤ 2)-hémimorphes. On définit la relation $D_{R,R'}$ de base E par : pour tout élément x de E, $D_{R,R'}(x, x) = +$ et pour tous éléments distincts x, y de E, $D_{R,R'}(x, y) = +$ lorsqu'il existe une suite $x = x_0, x_1, ..., x_k = y$ d'éléments de E telle que $R(x_i, x_{i+1}) \neq R'(x_i, x_{i+1})$ pour tout i élément de $\{0, 1, ..., k-1\}$. La relation $D_{R,R'}$ est une relation d'équivalence appelée relation de différence dont les classes sont appelées classes de différence.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.3. *[9] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 3)-hypomorphes sur une même base finie E, alors :*

$i)$ Toute classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle commun à R et R'.

$ii)$ Les restrictions de R et R' à une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ sont toutes deux, réflexives ou irréflexives.

Lemme 2.4. *[9] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 4)-hypomorphes sur une base finie E, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Alors :*

$i)$ Si R/C est un tournoi, alors il existe un entier h tel que R/C est un $D(T_h)$.

$ii)$ Si R/C n'abrite pas de 3-cycle, alors R/C est soit une chaîne, soit une presque-chaîne, soit une consécutivité, soit un cycle.

$iii)$ Si R/C abrite un 3-cycle, et si R/C n'est pas un tournoi, alors il existe un entier n tel que R/C est un élément de $E(S_n)$.

Lemme 2.5. *[4] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)- hémimorphes sur une base finie E et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$.*

Si R/C et R'/C sont (≤ 5)-hypomorphes et si R/C est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C \sim R^{\star}/C$.

Relation connexe. Une relation R de base finie E est dite connexe, si pour tous éléments distincts x, y de E, il existe un chemin orienté reliant x à y, (c'est à dire une suite $x_0 = x, x_1, ..., x_k = y$, telle que pour tout

$i = 0, 1, ..., k-1$, on a $R(x_i, x_{i+1}) \neq R(x_{i+1}, x_i)$). La composante connexe d'une partie A de E, telle que R/A est connexe, est la plus grande partie D de E telle que D contient A et la restriction R/D soit connexe.

Relation fortement connexe. Une relation R de base finie E est dite fortement connexe, si pour tous éléments distincts x, y de E, il existe un chemin monotone orienté reliant x à y, c'est à dire une suite $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$, telle que pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$, on a $R(x_i, x_{i+1}) \neq R(x_{i+1}, x_i)$ et $R(x_i, x_{i+1}) = +$. La composante fortement connexe de R contenant x est la plus grande partie $D(x)$ de E telle que $D(x)$ contienne x et la restriction $R/D(x)$ soit fortement connexe.

Relations binaires non auto-duales minimales. Une relation binaire est dite non auto-duale minimale si elle est non auto-duale et toutes ses restrictions propres sont auto-duales.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.6. *[3] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 4)-hémimorphes sur une base finie E et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$.*

Si C est différente de sa composante connexe, alors C est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

Lemme 2.7. *[3] Soient d un entier ≥ 5, R et R' deux relations binaires $(\leq d)$-hémimorphes sur une base finie E et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$.*

Si C est différente de sa composante connexe, alors R/C et R'/C sont $(\leq d-1)$-hypomorphes.

3. La (-6)-demi-reconstructibilité des relations binaires connexes finies

Dans ce paragraphe nous obtenons :

Théorème 3.1. *Les relations binaires connexes finies de cardinal $n \geq 13$ sont $(n-6)$-demi-reconstructibles.*

La preuve du théorème 3.1 se base sur les propositions suivantes :

Proposition 3.2. *Soient R et R' deux relations binaires de base commune E de cardinal n. Pour tout entier $h \geq 1$, si R et R' sont $(4, n-h)$-hypomorphes et si $\mid E \mid \geq 6 + h$, alors R et R' sont isomorphes.*

La preuve de la proposition 3.2 utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.3. *[10] Les relations binaires finies de cardinal* $n \geq 7$ *sont,* $(4, n-1)$*-reconstructibles.*

Lemme 3.4. *Les relations binaires finies de cardinal* $n \geq 8$ *sont,* $(4, n-2)$*-reconstructibles.*

Preuve. Soient R et R' deux relations binaires $(4, -2)$-hypomorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 8, et x un point quelconque de E. D'après l'hypothèse, les relations $R'/(E-\{x\})$ et $R/(E-\{x\})$ sont $(4, -1)$-hypomorphes et $\mid E - \{x\} \mid \geq 7$ (car $\mid E \mid \geq 8$), alors le lemme 3.3 prouve que $R'/(E - \{x\}) \sim R/(E - \{x\})$. Il s'ensuit que R et R' sont (-1)-hypomorphes. Comme R et R' sont 4-hypomorphes, alors R et R' sont $(4, -1)$-hypomorphes et par suite $R' \sim R$ d'après le lemme 3.3. □

Lemme 3.5. *Les relations binaires finies de cardinal* $n \geq 9$ *sont,* $(4, n-3)$*-reconstructibles.*

Preuve. Soient R et R' deux relations binaires $(4, -3)$-hypomorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 9, et x un point quelconque de E. D'après l'hypothèse, les relations $R'/(E-\{x\})$ et $R/(E-\{x\})$ sont $(4, -2)$-hypomorphes et $\mid E - \{x\} \mid \geq 8$ (car $\mid E \mid \geq 9$), alors d'après le lemme 3.4 $R'/(E - \{x\}) \sim R/(E - \{x\})$. Il s'ensuit que R et R' sont $(4, -1)$-hypomorphes et par suite le lemme 3.3 prouve que $R' \sim R$. □

Lemme 3.6. *[10] Les relations binaires finies de cardinal* n *sont,* $(n - h)$*-reconstructibles dès que* $h \geq 4$ *et* $n - h \geq 6$.

Preuve de la proposition 3.2. Soient R et R' deux relations binaires $(4, n - h)$-hypomorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à $6+h$. Alors $R' \sim R$ provient du lemme 3.3 si $h = 1$, du lemme 3.4 si $h = 2$, du lemme 3.5 si $h = 3$, et du lemme 3.6 si $h \geq 4$.

Proposition 3.7. *Soient* R *et* R' *deux relations binaires* (-6)*-hémimorphes sur une base finie* E *de cardinal* n *au moins égal à* 13, *et* C *une classe de l'équivalence* $D_{R,R'}$. *Si* C *est différente de sa composante connexe, alors:*

i) C *est un intervalle de* R *et* R' *sur lequel les restrictions de* R *et* R' *sont réflexives ou irréflexives.*

ii) $R'/C \sim R/C$.

Notons que comme conséquence de la proposition 3.7 on a :

Corollaire 3.8. *Soient R et R' deux relations binaires (-6)-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 13, et I une classe de l'équivalence $D_{R^\star,R'}$. Si I est différente de sa composante connexe, alors :*

i) I est un intervalle de $R^\star$ et R' sur lequel les restrictions de $R^\star$ et R' sont réflexives ou irréflexives.

ii) $R'/C \sim R^\star/C$.

Soient R et R' deux relations binaires (-6)-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 13, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ différente de sa composante connexe. D'après le lemme 2.1 les relations R et R' sont (≤ 6)-hémimorphes. Comme C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.6 prouve que C est un intervalle de R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

La preuve de la proposition 3.7 utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.9. *R'/C et R/C sont (≤ 5)-hypomorphes.*

Preuve. D'après le lemme 2.1 les relations R et R' sont (≤ 6)-hémimorphes. Comme C est différent de sa composante connexe, alors le lemme 2.7 prouve que R'/C et R/C sont (≤ 5)-hypomorphes. □

Lemme 3.10. *Si R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. D'après le lemme 3.9 R'/C et R/C sont (≤ 5)-hypomorphes, et par suite le lemme 2.4 de G. Lopez et C. Rauzy nous donne la forme de R/C et de R'/C, d'après la forme si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C$. Dans le cas où R/C est un élément de $E(S_n)$, le lemme 2.5 prouve que $R'/C \sim R/C$. Il s'ensuit que si R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C$. □

Lemme 3.11. *Si $\mid E - C \mid \geq 7$, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. Comme C est différente de sa composante connexe, alors il existe un élément x de $E-C$, tel que $R(x,C) \neq R(C,x)$. D'après le lemme 3.10, on peut supposer que R/C est un tournoi sans diamant et par suite R/C est soit une chaîne soit fortement connexe.

Cas 1 : Si R/C est une chaîne. D'après le lemme 3.9 les restrictions R'/C et R/C sont 3-hypomorphes, et par suite R'/C est une chaîne. Donc $R'/C \sim R/C$.

Cas 2 : Si R/C est un tournoi sans diamant fortement connexe, posons $H = R/(C \cup \{x\})$. Comme C est un intervalle, alors pour tout $y \in C$, l'arête $\{x, y\}$ est orientée et par suite H est un tournoi. Soient $a, b, c \in C$ tels que $R/\{a, b, c\}$ est un 3-cycle. Considérons alors les parties F de E contenant $\{x, a, b, c\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^\star$. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre que $C \cup \{x\}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe une telle partie F différente de $C \cup \{x\}$. Puisque H est un tournoi, alors R/F est aussi un tournoi. Comme $F \neq C \cup \{x\}$, alors il existe $y \in F$ et $y \notin C \cup \{x\}$, d'autre part C est un intervalle, donc $R/\{a, b, c, y\}$ est un diamant de sommet y et $R/\{a, b, c, x\}$ est un diamant de sommet x. Puisque C est un intervalle et R/C est un tournoi sans diamant, alors n'importe quel diamant de $R/(C \cup \{x\})$ a pour sommet x, mais dans R/F il y'a des diamants de sommet x et d'autres de sommet y. Il s'ensuit que $R/(C \cup \{x\})$ et R/F ne sont pas hémimorphes. Donc $F = C \cup \{x\}$. Le nombre de parties F de E contenant $\{x, a, b, c\}$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R, H, \{x, a, b, c\}) = 1$). D'après le lemme 2.2, le nombre de parties F de E contenant $\{x, a, b, c\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R', H, \{x, a, b, c\}) = 1$). Il s'ensuit que $R'/(C \cup \{x\}) \sim H$ ou $R'/(C \cup \{x\}) \sim H^\star$. Comme C est un intervalle et $R(x, C) = R'(x, C)$ et que $H = R/(C \cup \{x\})$ admet deux composantes fortement connexes x et C, alors $R'/(C \cup \{x\}) \sim R/(C \cup \{x\})$ et par suite $R'/C \sim R/C$.

□

Lemme 3.12. *$R'/C \sim R/C$.*

Preuve. La classe C étant différente de sa composante connexe, alors il existe un élément x de $E - C$, tel que $R(x, C) \neq R(C, x)$. D'après le lemme 3.10, on peut supposer que R/C est un tournoi sans diamant. Posons $X = E - (C \cup \{x\})$, on a les cas suivants :

c_1 Si $\mid X \mid \geq 6$, alors $\mid E - C \mid \geq 7$, et par suite le lemme 3.11 prouve que $R'/C \sim R/C$.

c_2 Si $\mid X \mid = 5$. Soit a_1 un point quelconque de C. Comme R/C est un tournoi sans diamant, alors $R/(C - \{a_1\})$ soit fortement connexe, soit une chaîne. Si $R/(C - \{a_1\})$ est une chaîne, alors $R'/(C - \{a_1\}) \sim R/(C - \{a_1\})$. Dans la suite $R/(C - \{a_1\})$ est un tournoi sans diamant fortement connexe. Soit f un hémimorphisme de $R/(E - X \cup \{a_1\})$ sur $R'/(E - X \cup \{a_1\})$. Comme C est un intervalle et $R/(E - X \cup \{a_1\})$ admet deux composantes fortement connexes x et $C - \{a_1\}$ et que $R(x, C) = R'(x, C)$, alors f est une isomorphisme avec $f(x) = x$ et $f(C - \{a_1\}) = C - \{a_1\}$. Il s'ensuit que $R'/(C - \{a_1\}) \sim R/(C - \{a_1\})$. Donc R/C et R'/C sont $(4,-1)$-hypomorphes et $\mid C \mid \geq 7$, et par suite d'après le lemme 3.3 $R'/C \sim R/C$.

c_3 Si $\mid X \mid = 4$. Soient a_1 et a_2 deux points de C, de la même façon qu'en c_2 nous montrons que $R'/(C - \{a_1, a_2\}) \sim R/(C - \{a_1, a_2\})$. Donc R/C et R'/C sont $(4,-2)$-hypomorphes et $\mid C \mid \geq 8$, et par suite $R'/C \sim R/C$ (lemme 3.4).

c_4 Si $\mid X \mid = 3$. Soient a_1, a_2 et a_3 trois points de C, de la même façon qu'en c_2 nous montrons que $R'/(C - \{a_1, a_2, a_3\}) \sim R/(C - \{a_1, a_2, a_3\})$. Donc R/C et R'/C sont $(4,-3)$-hypomorphes et $\mid C \mid \geq 9$, et par suite d'après le lemme 3.5 $R'/C \sim R/C$.

c_5 Si $\mid X \mid = 2$. Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 quatre points de C de la même façon qu'en c_2 nous montrons que $R'/(C - \{a_1, a_2, a_3, a_4\}) \sim R/(C - \{a_1, a_2, a_3, a_4\})$. Donc R/C et R'/C sont (-4)-hypomorphes et $\mid C \mid \geq 10$, et par suite d'après le lemme 3.6 $R'/C \sim R/C$.

c_6 Si $\mid X \mid = 1$. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 cinq points de C de la même façon qu'en c_2 nous montrons que $R'/(C - \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}) \sim R/(C - \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\})$. Donc R/C et R'/C sont (-5)-hypomorphes et $\mid C \mid \geq 11$, et par suite d'après le lemme 3.6 $R'/C \sim R/C$.

c_7 Si $\mid X \mid = 0$. Soient a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6 six points de C, de la même façon qu'en c_2 nous montrons que $R'/(C - \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}) \sim R/(C - \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\})$. Donc R/C et R'/C sont (-6)-hypomorphes et $\mid C \mid \geq 12$, et par suite d'après le lemme 3.6 $R'/C \sim R/C$. □

Preuve de la proposition 3.7. Comme C est différent de sa composante connexe, alors le lemme 2.6 prouve que C est un intervalle commun à R et R' sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Le lemme 3.12 prouve que $R'/C \sim R/C$.

Proposition 3.13. *Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E. Si chacune des équivalences $D_{R,R'}$ et $D_{R^\star,R'}$ possède une seule classe, alors R et R' sont des chaînes.*

La preuve de la proposition 3.13 utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.14. *[3] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, admettant une restriction non auto-duale, k la plus petite cardinalité des restrictions non auto-duales de R/C et I_0 la base d'une de ces restrictions. Alors la restriction R'/I_0 est isomorphe à $R^\star/I_0$.*

Lemme 3.15. *Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E. Si chacune des équivalences $D_{R,R'}$ et $D_{R^\star,R'}$ possède une seule classe, alors R', R et $R^\star$ sont donc deux à deux (≤ 5)-hypomorphes.*

Preuve. Il suffit de montrer que R n'admet aucune restriction non auto-duale. Par l'absurde supposons que R admet une restriction non auto-duale, soit K une restriction de cardinal minimal parmi les restrictions non auto-duales de R et soit X sa base. Le lemme 3.14 entraîne que $R'/X \sim R/X$ et $R'/X \sim R^\star/X$, et par suite $R/X \sim R^\star/X$ ce qui est absurde. Il s'ensuit que la relation R n'abrite aucune restriction non auto-duale. Les relations R', R et $R^\star$ sont donc deux à deux (≤ 5)-hypomorphes. □

Lemme 3.16. *[9] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 3)-hypomorphes sur une même base finie E, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si R/C n'est pas un tournoi, alors R/C admet une 3-consécutivité.*

Lemme 3.17. *[9] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 3)-hypomorphes sur une même base finie E, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Les 3-consécutivités de R/C s'inversent dans R'/C.*

Lemme 3.18. *Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E. Si chacune des équivalences $D_{R,R'}$ et $D_{R^\star,R'}$ possède une seule classe, alors R est un tournoi.*

Preuve. Par l'absurde, si R n'est pas un tournoi alors, d'après le lemme 3.16, R admet une 3-consécutivité de base $\{a_1, a_2, a_3\}$. D'après le lemme 3.17, la 3-consécutivité $R'/\{a_1, a_2, a_3\}$ s'inverse dans R et dans $R^\star$, ce qui est absurde. Donc R est un tournoi. □

Lemme 3.19. *[9] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 4)-hypomorphes sur une base finie E, et C une classe de l'equivalence $D_{R,R'}$. Les 3-cycles de R/C s'inversent dans R'/C.*

Preuve de la proposition 3.13. D'après le lemme 3.18, R est un tournoi. Par l'absurde si R admet une 3-cycle de base $\{b_1, b_2, b_3\}$, alors le lemme 3.19 prouve que le 3-cycle $R'/\{b_1, b_2, b_3\}$ s'inverse dans R et dans $R^\star$, ce qui est absurde. Donc R est une chaîne.

Preuve du théorème 3.1. Soient R une relation binaire connexe finie de base E de cardinal n au moins égal à 13, et R' une relation binaire $(n-6)$-hémimorphe à R. Le lemme 2.1 prouve que les relations R et R' sont (≤ 6)-hémimorphes. On a les cas suivants :

- Si l'équivalence $D_{R,R'}$ possède au moins deux classes, alors d'après le i) de la proposition 3.7, les classes de l'équivalence $D_{R,R'}$ sont des intervalles communs à R et R'. D'autre part, les restrictions de R et R' à chacune de ces classes sont isomorphes (proposition 3.7). Il s'ensuit que R' et R sont isomorphes.

- Si l'équivalence $D_{R^\star,R'}$ possède au moins deux classes, alors d'après le i) du corollaire 3.8, les classes de l'équivalence $D_{R^\star,R'}$ sont des intervalles communs à $R^\star$ et R'. D'autre part, les restrictions de $R^\star$ et R' à chacune de ces classes sont isomorphes (corollaire 3.8). Il s'ensuit que R' et $R^\star$ sont isomorphes.

- Si chacune des équivalences $D_{R,R'}$ et $D_{R^\star,R'}$ possède une seule classe, on peut voir à l'aide de la proposition 3.13, que R' et R sont des chaînes, et par suite $R' \sim R \sim R^\star$.

4. La (-5)-demi-reconstructibilité des relations binaires connexes finies

Dans ce paragraphe nous obtenons :

Théorème 4.1. *Les relations binaires connexes finies de cardinal* $n \geq 12$ *sont* $(n-5)$*-demi-reconstructibles.*

La preuve du théorème 4.1 est une conséquence des résultats suivants :

Proposition 4.2. *Soient R et R' deux relations binaires* (-5)*-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 12, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si C est différente de sa composante connexe, alors:*

i) C est un intervalle de R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

ii) $R'/C \sim R/C$.

Notons que comme conséquence des proposition 3.13 et 4.2 on a :

Corollaire 4.3. *Soient R une relation binaire connexe finie de base E de cardinal n au moins égal à 12, et R' une relation binaire* $(n-5)$*-hémimorphe à R, alors :*

- Si l'équivalence $D_{R,R'}$ possède au moins deux classes, alors R' et R sont isomorphes.

- Si l'équivalence $D_{R^\star,R'}$ possède au moins deux classes, alors R' et $R^\star$ sont isomorphes.

- Si chacune des équivalences $D_{R,R'}$ et $D_{R^\star,R'}$ possède une seule classe, alors R' et R sont des chaînes, et par suite $R' \sim R \sim R^\star$.

Soient R et R' deux relations binaires (-5)-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à 12, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ différente de sa composante connexe. D'après le lemme 2.1 les relations R et R' sont (≤ 5)-hémimorphes. Comme C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.6 prouve que C est un intervalle de R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

La preuve de la proposition 4.2 utilise les lemmes suivants :

Lemme 4.4. *i) R'/C et R/C sont (≤ 4)-hypomorphes.*

ii) Si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C$.

Preuve.

i) D'après le lemme 2.1, R et R' sont (≤ 5)-hémimorphes. Comme C est différent de sa composante connexe, alors le lemme 2.7 prouve que R'/C et R/C sont (≤ 4)-hypomorphes.

ii) Comme R'/C et R/C sont (≤ 4)-hypomorphes, alors le lemme 2.4 de G. Lopez et C. Rauzy nous donne la forme de R/C et de R'/C, d'après la forme si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C$. □

Lemme 4.5. *Si $\mid E - C \mid \geq 6$, alors $R'/C \sim R/C$.*

Preuve. Comme C est différente de sa composante connexe, alors il existe un élément x de $E-C$, tel que $R(x,C) \neq R(C,x)$. D'après le lemme 4.4, on peut supposer que R/C est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$, et par suite R/C est soit une chaîne, soit une presque-chaîne, soit fortement connexe.

- Si R/C est un tournoi sans diamant, on montre comme dans le lemme 3.11 que $R'/C \sim R/C$.

- Si R/C est une presque-chaîne. D'après le lemme 4.4 les restrictions R'/C et R/C sont 3-hypomorphes, et par suite R'/C est une presque-chaîne. Donc $R'/C \sim R/C$.

- Si R/C est un élément de $E(S_n)$ fortement connexe, posons $H = R/(C \cup \{x\})$. Soit $a,b,c \in C$ tels que $R/\{a,b,c\}$ est une 3-consécutivité d'arête neutre $\{a,b\}$. Comme C est un intervalle, alors pour tout $y \in C$, l'arête $\{x,y\}$ est orientée, d'autre part R/C est un élément de $E(S_n)$, alors toutes les arêtes neutres de R/C sont disjointes. Il s'ensuit que toutes les arêtes neutres de $H = R/(C \cup \{x\})$ sont disjointes. Considérons alors les parties F de E contenant $\{x,a,b,c\}$ et telles que : $R/F \sim H$ ou $R/F \sim H^{\star}$.

Montrons qu'il n'y en a pas d'autre que $C\cup\{x\}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe une telle partie F différente de $C\cup\{x\}$, et par suite il existe $y\in F$ et $y\notin C\cup\{x\}$. Comme C est un intervalle et toutes les arêtes neutres de H sont disjointes, alors $R/\{a,b,y\}$ est un pic de sommet y et $R/\{a,b,x\}$ est un pic de sommet x. Puisque C est un intervalle et que R/C est un élément de $E(S_n)$, alors n'importe quel pic de $R/(C\cup\{x\})$ a pour sommet x, mais dans R/F il y'a des pics de sommet x et d'autres de sommet y. Il s'ensuit que $R/(C\cup\{x\})$ et R/F ne sont pas hémimorphes. Donc $F=C\cup\{x\}$. Le nombre de parties F de E contenant $\{x,a,b,c\}$ telles que R/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R,H,\{x,a,b,c\})=1$). D'après le lemme 2.2, le nombre de parties F de E contenant $\{x,a,b,c\}$ telles que R'/F est hémimorphe à H est donc égal à 1 (c.a.d $n(R',H,\{x,a,b,c\})=1$). Il s'ensuit que $R'/(C\cup\{x\})\sim H$ ou $R'/(C\cup\{x\})\sim H^\star$. Comme C est un intervalle et que $R/(C\cup\{x\})$ admet deux composantes fortement connexes x et C, alors $H=R/(C\cup\{x\})\sim R'/(C\cup\{x\})$ et par suite $R'/C\sim R/C$. □

Lemme 4.6. *$R'/C\sim R/C$.*

Preuve. La classe C étant différente de sa composante connexe, il existe un élément x de $E-C$, tel que $R(x,C)\neq R(C,x)$. D'après le lemme 4.4, on peut supposer que R/C est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$, et par suite toute restriction de R/C est soit fortement connexe, soit une chaîne, soit une presque-chaîne. Posons $X=E-(C\cup\{x\})$, suivant le cardinal de X, on a les cas suivants :

- Si $\mid X\mid\geq 5$, alors $\mid E-C\mid\geq 6$, et par suite le lemme 4.5 prouve que $R'/C\sim R/C$.

- Si $\mid X\mid\in\{0,1,2,3,4\}$, on montre comme dans le lemme 3.12 que $R'/C\sim R/C$. □

Preuve de la proposition 4.2. Comme C est différent de sa composante connexe, alors le lemme 2.6 prouve que C est un intervalle commun à R et R'. Le lemme 4.6 prouve que $R'/C\sim R/C$.

5. La (-d)-demi-reconstructibilité des relations binaires connexes finies

Dans ce paragraphe nous obtenons :

Théorème 5.1. *Pour tout entier $d\geq 5$, les relations binaires connexes finies de cardinal $n\geq 7+d$ sont $(n-d)$-demi-reconstructibles.*

La preuve du théorème 5.1 est une conséquence des résultats suivants :

Proposition 5.2. *Soient d un entier ≥ 5, R et R' deux relations binaires $(-d)$-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à $7+d$, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si C est différente de sa composante connexe, alors :*

i) C est un intervalle de R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

ii) $R'/C \sim R/C$.

Notons que comme conséquence des proposition 3.13 et 5.2 on a :

Corollaire 5.3. *Soient d un entier ≥ 5, R une relation binaire connexe finie de base E de cardinal n au moins égal à $7+d$, et R' une relation binaire $(n-d)$-hémimorphe à R, alors :*

Corollaire 5.4. *- Si l'équivalence $D_{R,R'}$ possède au moins deux classes, alors R' et R sont isomorphes.*

- Si l'équivalence $D_{R^\star,R'}$ possède au moins deux classes, alors R' et $R^\star$ sont isomorphes.

- Si chacune des équivalences $D_{R,R'}$ et $D_{R^\star,R'}$ possède une seule classe, alors R' et R sont des chaînes, et par suite $R' \sim R \sim R^\star$.

Preuve de la proposition 5.2. Le lemme 2.1 prouve que les relations R et R' sont $(\leq d)$-hémimorphes.

i) Comme C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.6 prouve que C est un intervalle de R et R' sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

ii) Suivant la valeur de d on a :

- Si $d = 5$, la proposition 4.2 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si $d = 6$, la proposition 3.7 prouve que $R/C \sim R'/C$.

- Si $d \geq 7$. Comme C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.7 prouve que R/C et R'/C sont $(\leq d-1)$-hypomorphes. D'autre part $d \geq 7$, alors R/C et R'/C sont (≤ 6)-hypomorphes et par suite $R/C \sim R'/C$ d'après le lemme 1.1.

Optimalité de la valeur 7+d du théorème 5.1.

Dans ce paragraphe, nous donnons un contre-exemple, prouvant l'optimalité de la valeur $7+d$ du théorème 5.1. On considère : La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout i, T_i est une i-chaîne irréflexive.

Sous ces notations, on peut voir que les relations :

$R = T_2(R_1, T_d)$ et $R' = T_2({R^\star}_1, T_d)$ sont $(-d)$-hémimorphes, sans être hémimorphes sur un ensemble de cardinal $d + 6$.

References

[1] Y. BOUDABBOUS et J. DAMMAK : Sur la (-k)-demi- reconstructibilité des tournois finis, CRAS, Série I 326, pp. 1037-1040, (1998).

[2] A. BOUSSAIRI : Thèse de doctorat de mathématiques. Soutenue à l'Université Claude Bernard, le 12 Juin (1995).

[3] J. DAMMAK : La dualité dans la demi-reconstruction des relations binaires finies, CRAS, Série I 327, pp. 861-864, (1998).

[4] J. DAMMAK : Caractérisation des relations binaires finies d-demi-reconstructibles, Proyecciones, Volume 22, N^o 1, (2003).

[5] R. FRAÏSSÉ : L'intervalle en théorie des relations, in orders, descriptions and roles, M. Pouzet et D. Richard éd. North-Holland, pp. 313-342, (1984).

[6] C. GNANVO et P. ILLE : La reconstruction des tournois. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, série I, pp. 577-580, (1988).

[7] J. G. HAGENDORF et G. LOPEZ : La demi-reconstructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments. C. R. Acad. Sci. Paris, série I, 317, pp. 7-12, (1993).

[8] G. LOPEZ : L'indéformabilité des relations et multirelations binaires. Zeitschrift. Math. Logik Grundlagen Math. 24, pp. 303-317, (1978)

[9] G. LOPEZ et C. RAUZY : Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2,3,4 and (n-1), I. Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. 38, S. 27-37, (1992).

[10] G. LOPEZ et C. RAUZY : Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2,3,4 and (n-1), II. Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd 38, S. 157-168, (1992).

[11] M. POUZET : Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. Math. Zeitschr. 150, pp. 117-134, (1976).

[12] S. M. ULAM : A collection of mathematical Problems (Interscience Publisher, New-York, (1960).

Received : April, 2003.

Jamel Dammak
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Sfax
Université Claude Bernard Lyon 1
B. P. 802, 3018 Sfax
Tunisie
e-mail : jdammak@yahoo.fr
Fax : 216 74 274437