Proyecciones
Vol. 21, N^o 2, pp. 109-125, August 2002.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile

SPECTRE D'ORDRE UN POUR UN PROBLEME HYPERBOLIQUE ET APPLICATIONS

AOMAR ANANE
OMAR CHAKRONE
Université Mohamed Premier, Maroc
and
MOHAMMED GHANIM
E. N. C. G., Tanger-Maroc

Abstract

We define and determine the spectrum of order one of the d'Alembertian operator. We resolve the Fredholm alternative and the nonlinear problem at resonance.

1. Introduction

On se propose de résoudre le problème suivant :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \text{Trouver} & : & u : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{telle que :} \\ \Box u & = & \alpha u + \beta.\nabla u - \gamma u_t + g(x,t,u) + h(x,t) \\ & & \text{dans } Q, \\ u(x,t) & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,t+2\pi) & = & u(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times]0, 2\pi[$, $\Box u = u_{tt} - \Delta u$, $h \in L^2(Q)$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ et $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory.

On s'intéresse aux conditions sur (α, β, γ), h et g pour que le problème $(\mathcal{P})$ admette une solution.

Dans le cas $N = 1$, $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 0$ et $h = 0$, le problème $(\mathcal{P})$ a été étudié par plusieurs auteurs, citons en particulier [3], [4], [5], [6] ,[7] et[8]. Le cas $g(x,t,s) = g(s)$ a été etudié dans [9], le cas h quelconque dans [10], le cas $N = 1$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$ et α est une valeur propre de $\Box u$ a été etudié dans [7] et dans le cas où $\beta = 0$ et α est une valeur propre de $\Box u + \gamma u_t$, le problème $(\mathcal{P})$ a été étudié par Mustonen et Berkovits dans [5], ils ont établi l'existence de solutions avec des conditions de Landesman-Lazer [15] en utilisant un argument d'homotopie.

La situation que nous considérons ici est marquée par la présence d'un terme de transport $\beta.\nabla u$, ce qui constitue une extension du cas étudié par Mustonen et Berkovits dans [5].

L'étude du problème $(\mathcal{P})$ nous a conduit à introduire la notion du spectre d'ordre 1 $\sigma_1(\Box)$ pour le D'Alembertien $\Box$, de manière analogue à ce qui a été fait par Anane, Chakrone et Gossez dans [1], [2] et [13] pour le laplacien Δ.

L'introduction du spectre d'ordre un de l'opérateur $\Box u$ permet de traiter le problème $(\mathcal{P})$ présentant des dérivées partielles premières au niveau du second membre.

Après avoir déterminé le spectre $\sigma_1(\Box)$ dans la section 2, nous considérons dans une première étape le cas où $g = 0$ et nous établissons (dans la section 3) un résultat de type Alternative de Fredholm "d'ordre 1" en utilisant les propriétés élémentaires de l'opérateur linéaire $\Box u - \alpha u - \beta.\nabla u + \gamma u_t$. Enfin dans la section 4, nous nous plaçons dans une situation de résonance qui correspond au cas où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \sigma_1(\Box)$. Nous montrons, en utilisant des techniques analogues à celles développées dans [5], qu'une condition du type Landesman-Lazer "d'ordre 1" est suffisante pour l'existence de solutions.

2. Le spectre d'ordre 0 du d'Alembertien : $\Box$

Soit Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ et $Q = \Omega \times]0, 2\pi[$. Une fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $(\theta, 2\pi)$- périodique si $u(t + 2\pi) = \theta u(t)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, nous définissons l'espace de Hilbert $(V_\theta, \|.\|_\theta)$, par

$$V_\theta = \{u :\in L^2(Q);\ \ u_t, u_{x_i} \in L^2(Q),\ u\ \ (\theta, 2\pi) - \text{ périodique et } u(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}\}.$$

où $\|u\|_{V_\theta}^2 = \|u\|_{L^2(Q)}^2 + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(Q)}^2$. Pour $\theta \neq 0$, on considère le problème aux valeurs propres $\mathcal{P}_{0,\theta}$ suivant

$$(\mathcal{P}_{0,\theta}) \begin{cases} \text{Trouver } (u, \lambda) \in (V_\theta \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \text{ tel que } : \\ \Box u = \lambda u. \end{cases}$$

Définissons $\sigma_{o,\theta}(\Box) = \{\lambda \in \mathbb{R}/\exists u$ avec (u, λ) solution de $\mathcal{P}_{0,\theta}\}$. On note par $\sigma_0(-\Delta) = \{\lambda_i,\ \ i \in \mathbb{N}^*\}$ le spectre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ (nomé spectre d'ordre 0), et par $\{\psi_i,\ \ i \in \mathbb{N}^*\}$ une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée par des fonctions propres associées.

Proposition 1.

$$\sigma_{0,\theta}(\Box) = \begin{cases} \{\lambda_{i,k,\theta},\ \lambda_{i,\theta};\ \ i \in \mathbb{N}^* \ et\ k \in \mathbb{Z}\} & si \quad 0 < \theta < 1, \\ \{\lambda_{i,k,\theta};\ \ \ i \in \mathbb{N}^* \ et\ k \in \mathbb{Z}\} & si \quad \begin{matrix} -1 \leq \theta < 0 \\ ou\ bien\ \ \theta = 1, \end{matrix} \\ \{\lambda_{i,\theta};\ \ i \in \mathbb{N}^* \ et\ k \in \mathbb{Z}\} & si \quad \theta > 1, \\ \emptyset & si \quad \theta < -1 \end{cases}$$

où $\lambda_{i,k,\theta} = \lambda_i - (\frac{\arccos\theta}{2\pi} + k)^2$ *et* $\lambda_{i,\theta} = \lambda_i + (\frac{ln|\theta|}{2\pi})^2$ *avec* $\phi_{i,k,\theta} = [a\cos((\frac{\arccos\theta}{2\pi} + k)t)) + b\sin(\frac{\arccos\theta}{2\pi} + k)t)]\psi_i$. *(resp.* $\phi_{i,\theta} = ae^{\frac{ln|\theta|}{2\pi}t}\psi_i$*). sont les fonctions propres associées à* $\lambda_{i,k,\theta}$ *(resp.*$\lambda_{i,\theta}$*).*

Démonstration de la proposition 1. Le problème $\mathcal{P}_{0,\theta}$ peut être résolu par décomposition sur la base Hilbertienne $(\psi_i)_i$ de $L^2(\Omega)$. Soit $u \in V_\theta$, écrivons $u(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(t)\psi_i(x)$. Si $\Box u = \lambda u$, alors $\sum_{i=1}^{+\infty}[u_i''(t) + (\lambda_i - \lambda)u_i(t)]\psi_i(x) = 0$, donc $u_i''(t) + (\lambda_i - \lambda)u_i(t) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. En écrivant les conditions initiales, nous avons

$$\begin{cases} \theta u_i(0) &= u_i(2\pi), \\ \theta u_i'(0) &= u_i'(2\pi). \end{cases}$$

Cas1: $\lambda = \lambda_i$. Nous avons $u_i(t) = c_i t + d_i$ où

$$\begin{cases} \theta d_i &= 2\pi c_i + d_i, \\ \theta c_i &= c_i. \end{cases}$$

On vérifie facilement que si $\theta \neq 1$, alors $u_i(t) = 0$ et si $\theta = 1$, alors $u_i(t) = d_i$ avec $d_i \in \mathbb{R}$ quelconque.
Cas2: $\lambda_i - \lambda < 0$. Nous avons $u_i(t) = c_i \cosh(\omega_i t) + d_i \sinh(\omega_i t)$ où

$$\begin{cases} \omega_i^2 &= \lambda - \lambda_i, \\ \theta(c_i + d_i) &= (c_i + d_i)e^{2\pi\omega_i}, \\ \theta(c_i - d_i) &= (c_i - d_i)e^{-2\pi\omega_i}. \end{cases}$$

On vérifie facilement que si $\theta < 0$ ou $\theta = 1$, alors $1 - \theta e^{2\pi\omega_i} \neq 0$ et $1 - \theta e^{-2\pi\omega_i} \neq 0$ donc $c_i = d_i = 0$, par suite $u_i(t) = 0$. Et si $0 < \theta$ avec $\theta \neq 1$, alors $\omega_i = \pm\frac{ln|\theta|}{2\pi}$, donc $u_i(t) = c_i e^{\frac{ln\theta}{2\pi}t}$ et $\lambda = \lambda_i + (\frac{ln\theta}{2\pi})^2$.
Cas3: $\lambda_i - \lambda > 0$. Nous avons $u_i(t) = c_i \cos(\omega_i t) + d_i \sin(\omega_i t)$, où

$$\begin{cases} \omega_i^2 &= \lambda_i - \lambda, \\ \theta(c_i^2 + d_i^2) &= (c_i^2 + d_i^2)\cos(2\pi\omega_i). \end{cases}$$

On vérifie facilement que si $0 < |\theta| \leq 1$, alors $\omega_i = \pm\dfrac{\arccos\theta}{2\pi} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$, donc : $u_i(t) = c_i \cos(\frac{\arccos\theta}{2\pi} + k)t + d_i \sin(\frac{\arccos\theta}{2\pi} + k)t$, et $\lambda = \lambda_i - (\frac{\arccos\theta}{2\pi} + k)^2$. Et si $|\theta| > 1$ alors $u_i(t) = 0$. Ce qui prouve la proposition. ∎

Corollaire 1. *Le spectre d'ordre 0 de* $\Box$ *avec des conditions de périodicité est :* $\sigma_0(\Box) = \sigma_{0,1}(\Box) = \{\lambda_i - k^2/\lambda_i \in \sigma_0(-\Delta), k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Le spectre d'ordre 1 du d'Alembertien $\Box$

On considère le problème aux valeurs propres d'ordre 1 suivant :

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} \text{Trouver } (u,(\alpha,\beta,\gamma)) \in (V_1 - \{0\}) \times \mathbf{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \text{ tel que } : \\ \Box u = \alpha u + \beta.\nabla u - \gamma u_t. \end{cases}$$

Le spectre d'ordre 1 du d'Alembertien ($\Box$) est défini par

$\sigma_1(\Box) = \{(\alpha,\beta,\gamma);\ \ \exists u \in V_1 \setminus \{0\}$ avec $(u,(\alpha,\beta,\gamma))$ solution de $(\mathcal{P}_1)\}$

Proposition 2. *$(u,(\alpha,\beta,\gamma))$ est solution de $(\mathcal{P}_1)$ si et seulement si $(su, \alpha - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4})$ est solution de $(\mathcal{P}_{0,\theta})$, où $s(x,t) = e^{\frac{\beta}{2}x + \frac{\gamma}{2}t}$ et $\theta = e^{\pi\gamma}$.*

Démonstration de la proposition 2. Supposons que $(u,(\alpha,\beta,\gamma))$ est une solution de $(\mathcal{P}_1)$. Posons $v = su$, il est clair que $v \in V_\theta \setminus \{0\}$ et on a succesivement :
$\nabla v = su\frac{\beta}{2} + s\nabla u;$
$\Delta v = div\nabla v = s\frac{\beta}{2}.\nabla u + us\frac{(\beta)^2}{4} + s\frac{\beta}{2}.\nabla u + s\Delta u = s\beta.\nabla u + us\frac{\beta^2}{4} + s\Delta u;$
$v_t = \frac{\gamma}{2}su + su_t;$
$v_{tt} = \frac{\gamma^2}{4}su + \frac{\gamma}{2}su_t + \frac{\gamma}{2}su_t + su_{tt} = \frac{\gamma^2}{4}su + \gamma su_t + su_{tt}$; donc

$$\begin{aligned} \Box v &= v_{tt} - \Delta v = \frac{\gamma^2}{4}su + \gamma su_t + su_{tt} - s\beta\nabla u - us\frac{(\beta)^2}{4} - s\Delta u \\ &= (\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\beta^2}{4})v + s(\Box u - \beta\nabla u + \gamma u_t) \\ &= (\alpha - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4})v. \end{aligned}$$

Il en résulte que $(su, \alpha - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4})$ est solution du problème $(\mathcal{P}_{0,\theta})$, ce qui établit la moitié de la proposition. L'implication réciproque se démontre par un calcul identique. ■

Corollaire 2. *$\sigma_1(\Box) = \{(\alpha_{i,k},\beta,\gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^-,\quad k,\ i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\} \cup \{(\alpha_i,\beta,\gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathsf{N}} \times \mathbb{R}_*,\ i \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ où $\alpha_{i,k} = \frac{\beta^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4} + \lambda_i - (\frac{arccos(e^{\pi\gamma})}{2\pi} + k)^2$ et $\alpha_i = \frac{\beta^2}{4} + \lambda_i$.*

4. L'alternative de Fredholm

Dans toute la suite nous supposerons que l'ensemble $E := \{\lambda_j - k^2, \quad j \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ et que tout point de cet ensemble est isolé (par exemple si $N = 1$ et $\Omega =]0, r\pi[$ avec $r \in \mathbb{Q}$).

Étant donnés $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ et $h \in L^2(Q)$. On considère le problème suivant :

$$\mathcal{P}_{AF,1} \begin{cases} \text{trouver } u \in V_1 \text{ tel que} \\ \Box u = \alpha u + \beta.\nabla u - \gamma u_t + h. \end{cases}$$

Proposition 3. **1)** *Si* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \sigma_1(\Box)$, *alors* $\mathcal{P}_{AF,1}$ *admet une solution si et seulement si* $\int_Q h\phi = 0$ *pour toute fonction propre* ϕ *associée à* $(\alpha, -\beta, -\gamma)$.
2) *Si* $(\alpha, \beta, \gamma) \notin \sigma_1(\Box)$, *alors* $\mathcal{P}_{AF,1}$ *admet une solution pour tout* $h \in L^2(Q)$.

Lemme 1. *(théorème.ii.18 [11] page 29).*
Soient E *et* F *deux espaces de Banach et* $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ *un opérateur linéaire fermé à domaine dense, alors* $[Ker(A^*)]^\perp = Im(A)$ *où* A^* *est l'adjoint de* A.

Remarques 1.
a) Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, on défini l'opérateur

$$L_{\alpha,\beta,\gamma} : D(L_{\alpha,\beta,\gamma}) \subset L^2(Q) \to L^2(Q) : L_{\alpha,\beta,\gamma}(u) = \Box u - \alpha u - \beta\nabla u + \gamma u_t$$

où $D(L_{\alpha,\beta,\gamma})$ dénote le domaine de l'opérateur $L_{\alpha,\beta,\gamma}$ que nous préciserons par la suite. On vérifie facilement que les points 1) et 2) de la proposition 3 signifient que $[Ker(L_{\alpha,-\beta,-\gamma})]^\perp = Im(L_{\alpha,\beta,\gamma})$.
b) Soit $u \in D(L_{\alpha,\beta,\gamma})$, un calcul simple donne

$$L_{\alpha,\beta,\gamma}(u) = e^{-\frac{\beta}{2}x - \frac{\gamma}{2}t}[\Box(e^{\frac{\beta}{2}x + \frac{\gamma}{2}t}u) - (\alpha - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4})(e^{\frac{\beta}{2}.x + \frac{\gamma}{2}t}u)].$$

Écrivons $u(x,t) = \sum\limits_{1 \le i,k \le +\infty} u_{i,k}\psi_i(x) f_k(t)$ où $(f_k)_k$ est la base Hilbertienne de $L^2(]0, 2\pi[)$ vérifiant $-(f_k)_{tt} = k^2 f_k$ dans $]0, 2\pi[$ et $u_{i,k} =$

$(u, \psi_i f_k)$ avec $(.,.)$ désigne le produit scalaire de $L^2(Q)$. On vérifie que

$$L_{\alpha,\beta,\gamma}u = e^{-\frac{\beta}{2}x-\frac{\gamma}{2}t}[\sum_{i,k}(\lambda_i - k^2 - \alpha + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4})(ue^{\frac{\beta}{2}x+\frac{\gamma}{2}t}, \psi_i f_k)\psi_i f_k].$$

Donc le domaine et l'image de $L_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont définis respectivement par :

$$D(L_{\alpha,\beta,\gamma}) = \{u \in L^2(Q) \ ; \ aLa`aN$$
$$\sum_{i,k}(\lambda_i - k^2 - \alpha + \tfrac{\beta^2}{4} - \tfrac{\gamma^2}{4})^2(ue^{\frac{\beta}{2}x+\frac{\gamma}{2}t}, \psi_i f_k)^2 < +\infty\},$$

$$Im(L_{\alpha,\beta,\gamma}) = \{e^{\frac{-\beta}{2}x-\frac{\gamma}{2}t}[\sum_{i,k}(\lambda_i - k^2 - \alpha + \tfrac{\beta^2}{4} - \tfrac{\gamma^2}{4})(ue^{\frac{\beta}{2}x+\frac{\gamma}{2}t}, \psi_i f_k)\psi_i f_k],$$
$$u \in D(L_{\alpha,\beta,\gamma})\}.$$

Par conséquent $D(L_{\alpha,\beta,\gamma})$ est dense dans $L^2(Q)$ et $Im(L_{\alpha,\beta,\gamma})$ est fermé dans $L^2(Q)$.

c) $L_{\alpha,\beta,\gamma}$ est fermé (c'est-à-dire son graphe est fermé). (La démonstration découle de la proposition ii. 16 de [11] page 28).

Démonstration de la proposition 3. D'après le lemme 1 et les remarques 1 (b)et c)), on a

$$[Ker(L^*_{\alpha,\beta,\gamma})]^\perp = Im(L_{\alpha,\beta,\gamma}).$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green, on a pour tout $u, v \in D(L_{\alpha,\beta,\gamma})$

$$\begin{array}{rcl} (L_{\alpha,\beta,\gamma}(u), v) & = & \int_Q(\Box u)v - \alpha\int_Q uv - \int_Q(\beta.\nabla u)v + \gamma\int_Q u_t v \\ & = & \int_Q u.\Box v - \alpha\int_Q uv + \int_Q \beta u\nabla v - \gamma\int_Q uv_t \\ & = & (u, L_{\alpha,-\beta,-\gamma}(v)), \end{array}$$

d'où $L^*_{\alpha,\beta,\gamma} = L_{\alpha,-\beta,-\gamma}$, ce qui prouve la proposition 3. ∎

5. Un problème non linéaire à la résonance

Dans cette section nous étudions l'existence de solutions périodiques du problème

$$(\mathcal{P})\left\{\begin{array}{rcl} \Box u & = & \alpha u + \beta.\nabla u - \gamma u_t + g(x,t,u) + h(x,t) \text{ dans } Q, \\ u(x,t) & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,t+2\pi) & = & u(x,t) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R} \end{array}\right.$$

dans le cas de résonance où (α, β, γ) est une valeur propre d'ordre 1 du d'Alembertien $((\alpha, \beta, \gamma) \in \sigma_1(\Box))$. Avec $h \in L^2(Q)$ et $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory 2π-périodique en t. Par un mme calcul que dans la démonstration de la proposition 2, on vérifie facilement que u est une solution du problème $(\mathcal{P})$ si et seulement si $v = e^{\frac{\beta}{2}\cdot x}u$ est une solution du problème

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \begin{cases} \Box v &= (\alpha - \beta^2/4)v - \gamma v_t + \tilde{g}(x, t, v) + \tilde{h}(x, t) \text{ dans } Q, \\ v(x, t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ v(x, t + 2\pi) &= v(x, t) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

où $\tilde{g}(x, t, s) = e^{\frac{\beta}{2}\cdot x}g(x, t, e^{-\frac{\beta}{2}\cdot x}s)$ et $\tilde{h} = e^{\frac{\beta}{2}\cdot x}h$. Posons $\lambda = \alpha - \beta^2/4$, pour tout $u \in D(L_{\alpha,\beta,\gamma})$, on note par $Tu = \Box u + \gamma u_t$, $T_\lambda = T - \lambda I$ et $P_\lambda : L^2(Q) \to KerT_\lambda$ la projection orthogonale.

Lemme 2. **1)** *T est un opérateur linéaire fermé à domaine dense et à image fermé.*

2) *T est normal (c'est-à-dire il commute avec son adjoint.).*

3) *$Im(T) = [Ker(T)]^\perp$.*

4) *Si T_0 est la restriction de T sur $Im(T) \cap D(T)$, alors $T_0^{-1} : Im(T_0) \to Im(T) \cap D(T)$ est continu compact.*

5) *Il existe $c(\alpha, \beta) \in]0, +\infty]$ tel que pour tout $u \in D(T)$*

$$\langle T_\lambda u, u\rangle \leq \frac{1}{c(\alpha, \beta)}\|T_\lambda u\|^2$$

où

$$c(\alpha, \beta) = \min_{\{(j,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z};\ \lambda_j - k^2 > \alpha - \frac{\beta^2}{4}\}} |\lambda_j - k^2 - \alpha + \frac{\beta^2}{4}| + \frac{\gamma^2 k^2}{|\lambda_j - k^2 - \alpha + \frac{\beta^2}{4}|}$$

et $c(\alpha, \beta) = +\infty$ si $\lambda_j - k^2 \leq \alpha - \frac{\beta^2}{4}$ avec $c(\alpha, \beta)$ est la valeur optimale vérifiant cette inégalité.

Démonstration du lemme 2. **1)** D'après les remarques 1.

2) Il est clair que $T = T_\gamma$ commute avec $T^*_\gamma = T_{-\gamma)}$.

3) D'après la proposition 1, on a $Im(T) = [Ker(T^*)]^\perp$, et puisque T est normal, on a $Ker\,T^* = Ker\,T$, d'où l'assertion 3.

4) T_0 est bijective de $Im(T) \cap D(T) \to Im(T_0)$ car $Im(T) \cap Ker(T) = \{0\}$. Pour la compacité il suffit de composer avec l'injection compacte $H^1(Q) \to L^2(Q)$.

5) Soit $L^2_C(Q) = \{u + iv, \quad u, v \in L^2(Q)\}$ le complexifié de $L^2(Q)$. Les lois de $L^2_{\mathbb{C}}(Q)$ sont données par : $x + x' := (u + u') + i(v + v')$ et $\lambda x := (au - bv) + i(av + bu)$ pour tout $x = u + iv$, $x' = u' + iv' \in L^2_{\mathbb{C}}(Q)$ et $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$. Le produit scalaire de $L^2_{\mathbb{C}}(Q)$ est défini par :

$$\langle x, x' \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, u' \rangle + \langle v, v' \rangle + i(\langle u', v \rangle - \langle u, v' \rangle).$$

D'autre part, nous définissons l'opérateur linéaire complexe $T_{\mathbb{C}} : D(T_{\mathbb{C}}) \subset L^2_{\mathbb{C}}(Q) \to L^2_{\mathbb{C}}(Q)$ par $D(T_{\mathbb{C}}) = \{u + iv \in L^2_{\mathbb{C}}(Q), \quad u, v \in D(T)\}$ et $T_{\mathbb{C}}(u + iv) = Tu + iTv$ pour tout $u + iv \in D(T_{\mathbb{C}})$. Il est clair, d'après les assertions précédentes, que $Im(T_{\mathbb{C}}) = [Ker(T_{\mathbb{C}})]^{\perp}$, $T_{\mathbb{C}}$ est normal et que l'inverse de $T_{/D(T_{\mathbb{C}}) \cap Im(T_{\mathbb{C}})}$ est compact. Par conséquent $T_{\mathbb{C}}$ admet un spectre dans $\mathbb{C}$: $\sigma(T_{\mathbb{C}}) = \{\mu_j\}_{j \in I}$, où $I \subset \mathbb{Z}$. De plus il existe une base orthonormal $\{\phi_{jk}; \quad j \in I, \ k = 1, 2, ..., m(\mu_j)\}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(Q)$ tel que $T_{\mathbb{C}} \phi_{jk} = \mu_j \phi_{jk}$, $k = 1, 2, ..., m(\mu_j)$, $j \in I$ avec $m(\mu_j)$ est la multiplicité de μ_j, $\mu_j \neq 0$ (Notons que $m(\mu_j) < +\infty$ si $\mu_j \neq 0$ et $dim\, Ker\, T_{\mathbb{C}}$ peut tre infini). D'après [14] (théorème 4, p37) pour tout $w \in D(T_{\mathbb{C}})$, nous avons

$$T_{\mathbb{C}} w = \sum_{j \in I} \sum_{k=1}^{m(\mu_j)} \mu_j \langle w, \phi_{jk} \rangle_{\mathbb{C}} \phi_{jk}. \tag{1}$$

Remarquons que $T_{\mathbb{C}}(D(T)) \subset L^2(Q)$ et

$$\langle Tu, u \rangle = \langle T_{\mathbb{C}} u, u \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j,k} Re\mu_j |\langle w, \phi_{jk} \rangle_{\mathbb{C}}|^2, \tag{2}$$

$$\langle T_\lambda u, u \rangle = \sum_{j,k} (Re\mu_j - \lambda) |\langle w, \phi_{jk} \rangle_{\mathbb{C}}|^2 \tag{3}$$

pour tout $u \in D(T)$. D'après (1) et (2), on déduit facilement que

$$c(\alpha, \beta) = \inf_{Re\mu_j > \lambda} \frac{|\mu_j - \lambda|^2}{Re\mu_j - \lambda} \quad \text{avec } c(\alpha, \beta) = +\infty \ \text{ si } Re\mu_j \leq \lambda \quad \forall j \in I. \tag{4}$$

Et puisque l'ensemble $E := \{\lambda_j - k^2, \quad j \in \mathbb{N}^*, \ k \in \mathbb{Z}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ et que tout point de cet ensemble est isolé, on a

$$\inf_{Re\mu_j > \lambda} \frac{|\mu_j - \lambda|^2}{Re\mu_j - \lambda} = \min_{Re\mu_j > \lambda} \frac{|\mu_j - \lambda|^2}{Re\mu_j - \lambda} \quad \text{avec}$$

Affirmation. $\sigma(T_C) = \{\lambda_j - k^2 + i\gamma k; \ (j,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}\}$ avec $(i^2 = -1)$.

Preuve de l'affirmation. Comme $T_{\mathbb{C}}$ est un opérateur normal complexe, alors $E_\mu := Ker(T_{\mathbb{C}} - \mu I) = Ker(T^*_{\mathbb{C}} - \overline{\mu} I)$ pour tout $\mu \in \mathbb{C}$. Soit $\mu \in \sigma(T_{\mathbb{C}})$ et $u + iv \in E_\mu \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{cases} T_{\mathbb{C}}(u+iv) = Tu + iTv = \mu(u+iv), \\ T^*_{\mathbb{C}}(u+iv) = T^*u + iT^*v = \overline{\mu}(u+iv). \end{cases}$$

Dans notre situation, on a $\Box u = (Re\mu)u$, $\Box v = (Re\mu)v$, $\gamma u_t = -(Im\mu)v$ et $\gamma v_t = (Im\mu)u$, puisque $u + iv \neq 0$ (on suppose par exemple $u \neq 0$), il vient que $\Box u = (Re\mu)u$ et $-\gamma^2 u_{tt} = (Im\mu)^2 u$, d'où $Re\mu \in \sigma_0(\Box)$ et $(\frac{Im\mu}{\gamma})^2 \in \{k^2, \quad k \in \mathbb{Z}\}$, d'où l'affirmation 1, ce qui prouve le lemme 2. ∎

Nous supposons qu'il existe $\theta > 0$, $a \in L^2(Q)$ tel que $p.p.x \in \Omega$, $\forall (t,s) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$, on a

$$e^{\frac{\beta}{2}.x} |g(x,t,e^{-\frac{\beta}{2}.x} s)| \leq \theta |s| + a(x,t), \tag{5}$$

$$g(x,t,e^{-\frac{\beta}{2}.x} s) \text{ est croissante en } \ s \ \ p.p.x \in \Omega \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Désignons par $N : L^2(Q) \to L^2(Q) : \ N(u) = \tilde{g}(x,t,u)$ l'opérateur de Nemytski associé à $\tilde{g}$.

Lemme 3. . *Si g vérifie (5) et (6), alors pour tout $\delta > \theta$ il existe $c_\delta(.,.)$ tel que*

$$\langle N(u) - N(w), u - v \rangle \geq \frac{1}{\delta} \|N(u)\|^2 - c_\delta(w,v) \tag{7}$$

pour tout $u, v, w \in L^2(Q)$.

Démonstration du lemme 3. Cette démonstration est inspirée du travail de Brézis et Nirenberg dans [12].
Soit $\delta > \theta$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tel que $\frac{1}{\theta} - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{\delta}$. pour tout $u,\ v,\ w \in L^2(Q)$, on a

$$\langle N(u)-N(w), u-v\rangle = \langle N(u)-N(w), u-w\rangle + \langle N(u), w-v\rangle - \langle N(w), w-v\rangle.$$

D'après (5) et (6), on a

$$\begin{aligned}\langle N(u) - N(w), u - w\rangle &= \textstyle\int_Q |\tilde{g}(x,t,u) - \tilde{g}(x,t,w)||u-w| \\ &\geq \textstyle\int_Q |\tilde{g}(x,t,u) - \tilde{g}(x,t,w)| \left\{\frac{|\tilde{g}(x,t,u)|-a(x,t)}{\theta} - |w|\right\} \\ &\geq \tfrac{1}{\theta}\|N(u)\|^2 - c(w)N(u) - c(w)\end{aligned}$$

où $c(w)$ est une constante positive;

$$\langle N(u), w-v\rangle \geq -c_1(w,v)\|N(u)\| \ \text{ et } \langle N(w), w-v\rangle = c_2(w,v)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives.
En faisant la somme et en tenant compte que $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, il vient

$$\begin{aligned}\langle N(u) - N(w), u - v\rangle &\geq \tfrac{1}{\theta}\|N(u)\|^2 - c_3(w,v)N(u) - c_4(w,v) \\ &\geq \tfrac{1}{\theta}\|N(u)\|^2 - \tfrac{\varepsilon}{2}(N(u))^2 - \tfrac{2}{2\varepsilon}(c_3(w,v))^2 - c_4(w,v) \\ &= (\tfrac{1}{\theta} - \tfrac{\varepsilon}{2})\|N(u)\|^2 - c_\delta(w,v) \\ &\geq \tfrac{1}{\delta}\|N(u)\|^2 - c_\delta(w,v).\end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. ■

Lemme 4. . *[6]. On suppose (5), (6), $\lambda \in \sigma(T)$ et $\lambda \geq 0$. Soit $f \in L^2(Q)$, s'il existe $R > 0$ tel que*

$$T(u) - \lambda u - tN(u) - (1-t)P_\lambda u \neq tf \quad \forall u \in D(T), \|u\| = R,\ 0 \leq t \leq 1,$$

alors d'équation $T(u) - \lambda u - N(u) = f$ admet une solution $u \in D(T)$ avec $\|u\| < R$.

Démonstration du lemme 4. D'après (5) et (6) N est continue et $\lambda I + N$ est un opérateur monotone, par suite le résultat découle en utilisant l'homotopie étudiée dans [4] voir aussi [3]. ■

Théorème 1. *Nous supposons que g vérifie (5) et (6), nous avons*

1) *Si* $\lambda \geq 0$ *(c'est-à-dire* $\alpha - \dfrac{\beta^2}{4} \geq 0$*) et* $0 < \theta < c(\alpha,\beta)$*, alors*

$$\overline{Im\, T_\lambda - conv\, \mathcal{R}(N)} = \overline{\mathcal{R}(T_\lambda - N)}$$

où $\mathcal{R}(N) = N(L^2(Q))$ *et* $conv\,\mathcal{R}(N)$ *désigne l'envelope convexe de* $\mathcal{R}(N)$*.*

2) *Si de plus il existe* $\eta > 0$ *et* $b \in L^2(Q)$ *tels que*

$$e^{\frac{\beta}{2}\cdot x}|g(x,t,e^{-\frac{\beta}{2}\cdot x}s)| \geq \eta|s| - b(x,t) \qquad p.px \in \Omega,\ t,s \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

alors $\mathcal{R}(N) = L^2(Q)$ *et* $\mathcal{R}(T_\lambda - N) = L^2(Q)$ *c'est-à-dire le problème* $(\mathcal{P})$ *admet une solution.*

Démonstration du théorème 1. 1) Il suffit de montrer que $Im\,T_\lambda - conv\,\mathcal{R}(N) \subset \overline{\mathcal{R}(T_\lambda - N)}$. Soit $f \in Im\,T_\lambda - conv\,\mathcal{R}(N)$, écrivons $f = T_\lambda u_0 - h$ où $h = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i N(u_i)$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ et $u_0 \in D(T)$. Si $f \in \mathcal{R}(T_\lambda - N)$, alors l'assertion est démontrée, sinon l'équation $T_\lambda u - N(u) = f$ n'admet pas de solution, ce qui revient à dire que l'équation

$$T_\lambda w - N(u_0 + w) + h = 0 \quad \text{ avec } \quad w = u - u_0 \tag{9}$$

n'admet pas de solution. D'après le lemme 4 il existe (w_n) et (t_n) tels que $\|w_n\| \to +\infty$, $0 < t_n < 1$ et

$$T_\lambda\, w_n - (1 - t_n)P_\lambda\, w_n - t_n(N(u_0 + w_n) - h) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Comme $T_\lambda\, w_n$ et $P_\lambda\, w_n$ sont orthogonales, on a

$$\|T_\lambda\, w_n\| \leq t_n(\|N(u_0 + w_n)\| + \|h\|). \tag{11}$$

En multipliant (10) par w_n et en utilisant le lemme 3 avec $0 < \delta < c(\alpha,\beta)$, il vient que

$$\begin{aligned}
\langle T_\lambda\, w_n, w_n\rangle &= (1 - t_n)\|P_\lambda w_n\|^2 + t_n(\langle N(u_0 + w_n), w_n\rangle - \langle h, w_n\rangle) \\
&= (1 - t_n)\|P_\lambda w_n\|^2 + t_n \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle N(u_0 + w_n) - N(u_i), w_n\rangle \\
&\geq (1 - t_n)\|P_\lambda w_n\|^2 + t_n\{\frac{1}{\delta}\|N(u_0 + w_n)\|^2 - c(f)\}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 2 assertion 5) et (11), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{c(\alpha,\beta)}t_n^2(\|N(u_0+w_n)\|+\|h\|)^2 &\geq \frac{1}{c(\alpha,\beta)}\|T_\lambda w_n\|^2\\ &\geq \langle T_\lambda w_n, w_n\rangle\\ &\geq \frac{t_n^2}{\delta}\|N(u_0+w_n)\|^2 - c(f)\\ &\quad +(1-t_n)\|P_\lambda w_n\|^2.\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\delta}-\frac{1}{c(\alpha,\beta)}>0$, on déduit que la suite $(t_n\|N(u_0+w_n)\|)_n$ est bornée, donc $((1-t_n)\|P_\lambda w_n\|^2)_n$ est bornée, et par (11), on a aussi $(T_\lambda w_n)_n$ est bornée, par suite $(Q_\lambda(w_n))_n := (w_n - P_\lambda w_n)_n$ est bornée. par conséquent $\|P_\lambda w_n\|\to+\infty$, donc $t_n\to 1$ et $(1-t_n)\|P_\lambda w_n\|\to 0$. Par passage à la limite dans (10), on obtient $T_\lambda w_n - N(u_0+w_n)+h\to 0$, ce qui prouve que $f\in\overline{\mathcal{R}(T_\lambda - N)}$.

2) D'après (8), on a $\mathcal{R}(N) = L^2(Q)$. Soit donc $f\in L^2(Q) = Im\,T_\lambda - conv\,\mathcal{R}(N)$, supposons que $f\notin\mathcal{R}(T_\lambda - N)$. Nous procéderons de faon analogue que l'assertion 1, nous montrons facilement que la suite $(N(u_0+w_n))_n$ est bornée. D'après (8) on déduit que (w_n) est bornée, ce qui est absurde, d'où l'assertion 2. ■

Afin d'étudier le problème $(\mathcal{P})$ à la résonance, nous reprenons les notations données dans [12] : Le support de $\mathcal{R}(N)$ est défini par

$$I^*_{\mathcal{R}(N)}(v) = \sup_{u\in L^2(Q)}\langle N(u), v\rangle \qquad v\in L^2(Q)$$

et la fonction de recession de N est défini par

$$J_N(v) = \liminf_{t\to+\infty,\ u\to v}\langle N(tu), v\rangle \qquad v\in L^2(Q).$$

Notons aussi par

$$[\tilde{g}, v] = \int_{v>0}\tilde{g}^+ v + \int_{v<0}\tilde{g}^- v, \qquad v\in L^2(Q),$$

où

$$\tilde{g}^+(x,t) = \liminf_{s\to+\infty}\tilde{g}(x,t,s), \quad \tilde{g}^-(x,t) = \limsup_{s\to-\infty}\tilde{g}(x,t,s).$$

D'après [12] on a la proposition suivante

Proposition 4. *Soit $h \in L^2(Q)$. Si on suppose (5) et (6), alors*

1) $[\tilde{g}, v] = J_N(v) = I^*_{\mathcal{R}(N)}(v)$ *pout tout* $v \in L^2(Q)$.

2) *si* $\lambda > 0$, *alors* h *appartienne à l'interieur de* $ImT_\lambda - conv\,\mathcal{R}(N)$ *si et seulement si* $[\tilde{g}, v] > \langle -h, v\rangle$ *pour tout* $v \in Ker\,T_\lambda \setminus \{0\}$.

3) *si* $\lambda = 0$, *alors* $h \in \overline{Im\,T_\lambda - conv\,\mathcal{R}(N)}$ *si et seulement si* $[\tilde{g}, v] \geq \langle -h, v\rangle$ *pour tout* $v \in KerT$.

Maintenant nous sommes en mesure d'énoncer des résultats d'existence pour le problème $(\mathcal{P})$ avec des conditions de résonance de Landesman-Lazer d'ordre 1.

Théorème 2. *Soit $h \in L^2(Q)$. Si on suppose (5) et (6) avec $0 < \theta < c(\alpha, \beta)$, alors.*

1) *Si* $\lambda > 0$ *et* $[\tilde{g}, v] > \langle -h, v\rangle$ *pour tout* $v \in Ker\,T_\lambda \setminus \{0\}$, *alors le problème* $(\mathcal{P})$ *admet une solution* $u \in D(T)$.

2) *Si* $\lambda = 0$ *(c'est-à-dire* $\alpha - \dfrac{\beta^2}{4} = 0$*) et* $[\tilde{g}, v] \geq \langle -h, v\rangle$ *pour tout* $v \in Ker\,T$, *alors le problème* $(\mathcal{P})$ *admet une solution dans le sens que* $h \in \overline{\mathcal{R}(T - N)}$.

Démonstration du théorème 2. 1) D'après la proposition 4, $h \in ImT_\lambda - conv\,\mathcal{R}(N)$ et d'après le théorème 1, $h \in \overline{\mathcal{R}(T_\lambda - N)}$. Donc si $h \in \mathcal{R}(T - N)$, alors l'assertion 1 est démontrée, sinon il existe une suite (u_n) de $D(T)$ tel que

$$T_\lambda\, u_n - N(u_n) \to f. \tag{12}$$

En utilisant la mme démonstration que le théorème 1, nous montrons facilement que les suites $(T_\lambda\, u_n)$, $(N(u_n))$ et $(u_n - P_\lambda\, u_n)$ sont bornées et que $\|P_\lambda\, u_n\| \to +\infty$. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, pour une sous suite, nous avons les convergences faibles suivantes $v_n \to v$ et $T_\lambda\, u_n \to \chi \in Im\,T_\lambda$. Il vient que $P_\lambda\, v_n \to P_\lambda\, v \in Ker\,T_\lambda$ faiblement et $v_n - P_\lambda\, v_n \to 0$ fortement. Comme $Ker\,T_\lambda$ est de dimension finie $P_\lambda\, v_n \to P_\lambda\, v$ fortement, donc $v_n \to v = P_\lambda\, v$. D'autre part

$$\langle T_\lambda\, u_n, v\rangle \to \langle \chi, v\rangle = 0,$$

et par (12), on a $\langle N(u_n), v\rangle \to \langle -h, v\rangle$. D'après la proposition 4, il vient que

$$\langle -h, v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle N(\|u_n\| v_n), v\rangle \geq J_N(v) = [\tilde{g}, v]$$

ce qui est absurde, d'où l'assertion 1.

L'assertion **2)** se démontre facilement en utilisant le théorème 1 et la proposition 4.

References

[1] A. Anane-O. Chakrone-J. P. Gossez, Spectre d'ordre supérieure et problème de non résonance, C. R. Acad. Sci.Paris, t325, serie I, pp. 33-36, (1997).

[2] A. Anane-O. Chakrone-J. P. Gossez, Spectre d'ordre supérieure et problème aux limites quasi-linéaires, Bolletino U.M.I. (8) 4-B, pp. 483-519, (2001).

[3] A. K Bennaoum,on the Dirichlet problem for the nonlinear wave equation in bounded domains with corner points, institut de mathématique pure et appliquée université catholique de Louvain-Belgique, recherches de mathematique 51 (1996).

[4] A. K. Bennaoum-J. Mawhin, periodic solutions of some semilinear wave equations on balls and on spheres, institut de Mathématique pure et appliquée université catholique de Louvain-Belgique, recherches de mathématique 15, (1992).

[5] J. Berkovits-V. Mustonen, On the resonance for semilinear equations with normal linear part, J. Math. Maroc 2, pp. 115-123, (1994).

[6] J. Berkovits-V. Mustonen, An extension of Leray-Schauder degree and applications to nonlinear wave equations, Differential and Integral Equations 3, pp. 945-963, (1990).

[7] J. Berkovits-V. Mustonen, On semilinear wave equations at resonance. proceedings of the first world congress of nonlinear analysts, 1992. Editor: V. Lakshmikantham, Berlin, New York, (1996).

[8] J. Berkovits-V. Mustonen,an application of topologique degree to semilinear equations with nonlinearities strongly monotones, Bull. London Math. Soc. 23, pp. 470-476, (1991).

[9] J. Berkovits-V. Mustonen, On multiple solutions for a class of semilinear wave equations, Nonlinear Analysis: theory and applications, Vol. 16, No. 5, pp. 421-434, (1991).

[10] J. Berkovits-V. Mustonen: On nonresonance for systems of semilinear wave equations, Nonlinear Analysis: theory and applications, Vol. 29, pp. 627-638, (1997)

[11] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson (1987).

[12] H. Brézis-L. Nirenberg, Characterization of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 5, pp. 225-326, (1978).

[13] O. Chakrone, thèse de doctorat.université d'oujda (1998).

[14] R. Dautray-J. L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, T2 Masson (1985).

[15] E. Landesman, A. Lazer, Nonlinear perturbation of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech. 19, pp. $609-623$, (1970).

Received : December, 2001.

AOMAR ANANE
Département de mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed Premier
60.000 OUJDA
MAROC
e-mail : anane@sciences.univ-oujda.ac.ma

OMAR CHAKRONE
Département de mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed Premier
60.000 OUJDA
MAROC
e-mail : chakrone@sciences.univ-oujda.ac.ma

MOHAMMED GHANIM
E. N. C. G.
Tanger - Maroc
e-mail : ghanimmohammed@hotmail.com