

Proyecciones
Vol. 20, N° 2, pp. 217-241, August 2001.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile

TOPOLOGIES POLAIRES COMPATIBLES AVEC UNE DUALITÉ SÉPARANTE SUR UN CORPS VALUÉ NON-ARCHIMÉDIEN

R. AMEZIANE HASSANI

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fes - MAROC
and

M. BABAHMED

Université Abdelmalek Essaâdi, Tetouan - MAROC

Abstract

In this paper, we deal with polar topologies in separated dual pair $\langle X, Y \rangle$ of vector spaces over a non-archimedean valued field. We study compatible polar topologies, and we give some results characterizing specific subsets of X related to these topologies, especially if the field K is spherically complete or the compatible topology is polar or strongly polar. Furthermore, we investigate some topological properties in the duality $\langle X, Y \rangle$ such as barreldness and reflexivity.

1. §Introduction

La dualité dans les espaces normés sur un corps valué non-archimédien (n.a.) a été étudiée par Monna [3] et Fleischer [1]; si le corps de base est sphériquement complet, cette étude est, en grande partie, semblable à celle faite dans les espaces normés sur le corps réel.

Dans [8] van Tiel a développé la théorie de la dualité dans les espaces localement convexes sur un corps valué n.a. sphériquement complet; un outil nécessaire est le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences. Ce théorème n'est vérifié dans le cas non-archimédien que si le corps de base est sphériquement complet. Pour établir une théorie satisfaisante de la dualité dans les espaces localement convexes sur un corps valué n.a. non-sphériquement complet, Schikhof [6] a introduit la notion d'espaces polaires et celle d'espaces fortement polaires. Ces notions jouent un rôle fondamental dans cette théorie du fait que dans la classe d'espaces fortement polaires on a la propriété de Hahn-Banach pour l'extension des formes linéaires continues ([6], théorème 4.2).

Dans ce travail, on étudie les topologies définies à partir d'une dualité séparante sur un corps valué n.a. En se référant aux travaux de Van Tiel [8] et ceux de Schikhof [6], on va donner quelques propriétés fondamentales des topologies polaires dans une dualité séparante $\langle X, Y \rangle$ de K -espaces vectoriels. Dans la plupart des résultats établis, si K n'est pas sphériquement complet, on suppose que X , muni d'une telle topologie, soit polaire ou fortement polaire.

Dans §2, on établit quelques résultats relatifs à la dualité séparante $\langle X, Y \rangle$.

Dans §3, on définit les topologies polaires; ces topologies sont localement K -convexes, et on montre que si K est sphériquement complet, la topologie de tout espace localement K -convexe est une topologie polaire (proposition 3.2.); puis, on introduit la notion de famille saturée pour comparer ces topologies; on montre que la topologie polaire est définie d'une façon unique par une famille saturée (corollaire 3.1.).

Dans §4, on étudie les topologies polaires compatibles avec la dualité séparante $\langle X, Y \rangle$. On montre que les topologies polaires compat-

ibles telles que X soit fortement polaire admettent les mêmes sous-ensemble K -fermés et fermés (corollaire 4.1.). On montre aussi que, si K est discret et sphériquement complet, les topologies polaires compatibles admettent les mêmes sous-ensembles absolument K -convexes et fermés (corollaire 4.6.); et si K est dense et sphériquement complet, elles admettent les mêmes sous-ensembles absolument K -convexe, K -fermés et fermés (corollaire 4.7.). En outre, si Y est faiblement complet, on montre que les topologies polaires compatibles telles que X soit polaire admettent les mêmes sous-ensembles bornés (corollaire 4.5.).

Dans §5, on donne quelques résultats relatifs aux espaces tonnelés et réflexifs dans la dualité séparante $\langle X, Y \rangle$; on caractérise les topologies polaires compatibles telles que X soit tonnelé, et on montre que si K sphériquement complet et τ est une topologie polaire compatible, X est τ -réflexif (corollaire 5.3.).

§1. Préliminaires.

Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué n.a., $|K| \setminus \{0\}$ est un sous-groupe multiplicatif de \mathbf{R}_+^* ; s'il est cyclique, on dit que la valeur absolue n.a. $|\cdot|$ est discrète, ou que K est discret. Sinon, $|K| \setminus \{0\}$ est dense dans \mathbf{R}_+^* , et on dit que $|\cdot|$ est dense, ou que K est dense. Dans les deux cas, il existe $\rho > 1$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ tels que $|\lambda_n| = \rho^n \quad \forall n \in \mathbf{Z}$ ([8]).

Un corps valué n.a. est dit local s'il est localement compact; les corps valué n.a. locaux sont: 1° le complété d'une extension transcendante simple d'un corps fini; 2° les extensions algébriques finies d'un corps Q_p , où Q_p est le corps des nombres p -adiques ([3]).

Un corps valué n.a. est dit sphériquement complet si toute famille de boules dans K qui est totalement ordonnée par inclusion admet une intersection non vide. Cette notion a été introduite par Inglettion [2] pour étudier le théorème de Hahn-Banach dans les espaces normés n.a. Un corps valué n.a. discret et complet est sphériquement complet, et tout corps valué n.a. local est sphériquement complet ([8]).

Soit E un K -espace vectoriel, un sous-ensemble A de E est dit absolument K -convexe si $\lambda x + \mu y \in A$ pour tous $x, y \in A$ et $\lambda, \mu \in K$

tels que $|\lambda| \leq 1$ et $|\mu| \leq 1$. Si A est un sous-ensemble de E , $\Gamma(A)$ est l'enveloppe absolument K -convexe de A , c'est le plus petit sous-ensemble absolument K -convexe contenant A . On appelle base de filtre K -convexe sur E , une base de filtre sur E formée d'ensembles de la forme $x + A$, où $x \in E$ et A est absolument K -convexe; et on appelle filtre K -convexe sur E un filtre sur E engendré par une base de filtre K -convexe. Un sous-ensemble M de E est dit C -compact si tout filtre K -convexe sur M possède au moins un point adhérent dans M . Tout compact est C -compact; tout sous-ensemble fermé d'un C -compact est C -compact, et tout sous-ensemble absolument K -convexe et C -compact est fermé ([7]).

Un sous-ensemble de E C -compact n'est pas nécessairement borné.

Un sous ensemble A absolument K -convexe d'un K -espace vectoriel E est dit K -fermé si pour tout $x \in E$ l'ensemble $\{|\lambda|/\lambda x \in A\}$ est fermé dans $|K|$.

Si p est une semi-norme n.a.; sur E , $\overline{B_p}(0, 1) = \{x \in E/p(x) \leq 1\}$ est K -fermée.

Proposition 1.1. *Soit A un sous-ensemble de E absolument K -convexe.*

1° si K est discret; A est K -fermé;

2° si K est dense; A est K -fermé si, et seulement si, pour tout $x \in E$ tel que $\lambda x \in A$ pour tout $|\lambda| < 1$, $x \in A$.

L'intersection d'une famille de sous-ensembles K -fermés est K -fermée.

Si A est un sous-ensemble de E absolument K -convexe, on note $Kf(A)$ l'enveloppe K -fermée de A , c'est le plus petit sous-ensemble K -fermé contenant A . Si K est discret $Kf(A) = A$, et si K est dense $Kf(A) = \bigcap_{|\lambda| > 1} \lambda A$.

Tout espace vectoriel topologique sur K admet un système fondamental de voisinages (S.F.V.) de 0 équilibrés et qu'on peut choisir ouverts ou fermés. Un espace vectoriel topologique sur $K(E, \tau)$ est dit localement K -convexe s'il admet un S.F.V. de 0 formé de sous-ensembles absolument K -convexes, dans ce cas la topologie τ est définie par une famille \mathcal{P} de semi-normes n.a. τ -continues sur E ; de plus, si K est discret, on peut supposer que $N_p = \{p(x)/x \in E\} \subset |K|$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ ([3]).

Soit (E, τ) un espace localement K -convexe; une semi-norme n.a. p sur E est dite τ -polaire si $p = \sup \{ |f| / f \in E' \text{ et } |f| \leq p \}$. Si K est sphériquement complet, toute semi-norme n.a. sur E est τ -polaire. Si K n'est pas sphériquement complet on a $(m(K)/c_0(K))' = \{0\}$ ([4], p.108), où $m(K)$ est l'ensemble des suites bornées dans K et $c_0(K)$ est l'ensemble des suites nulles dans K ; donc la norme n.a. canonique sur $m(K)/c_0(K)$ n'est pas polaire.

Proposition 1.2. ([6], proposition 3.2.)

Soient (E, τ) un espace localement K -convexe et p une semi-norme n.a. sur E ; les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) p est τ -polaire;
- (ii) $\forall a \in E$ et $\forall \lambda \in K$ tels que $|\lambda| < p(a)$, $\exists f \in E'$ telle que $f(a) = \lambda$ et $|f| \leq p$;
- (iii) $\forall D$ sous-espace de E de dimension 1, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall f \in D'$ telle que $|f| \leq p$ sur D , $\exists \bar{f} \in E'$ un prolongement de f telle que $|\bar{f}| \leq (1 + \varepsilon)p$ sur E ;
- (iv) $\forall a \in E \setminus \bar{B}_p(0, 1)$, $\exists f \in E'$ telle que $|f(a)| > 1$ et $|f(\bar{B}_p(0, 1))| \leq 1$.

Remarque 1.1. 1° Schikhof a défini algébriquement une semi-norme n.a. polaire ([6], p.194). On a donné cette définition grâce au dual topologique d'un espace localement K -convexe; cependant les conditions de la proposition 3.2. de [6] ne changent que pour les formes linéaires, elles sont continues dans notre cas.

2° Si K est sphériquement complet, on a toutes les conditions (i)-(iv); de plus, on peut prendre $|\lambda| \leq p(a)$ dans (ii) et $\varepsilon \geq 0$ dans (iii).

On dit que E est τ -polaire si la topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes n.a. τ -polaires; et on dit que E est fortement- τ -polaire si toute semi-norme n.a. τ -continue sur E est τ -polaire. Tout espace fortement- τ -polaire est τ -polaire; et si K est sphériquement complet, tout espace localement K -convexe est fortement- τ -polaire. Si K n'est pas sphériquement complet $m(K)/c_0(K)$ n'est pas fortement- $\tilde{\tau}_\infty$ -polaire, où $\tilde{\tau}_\infty$ est la topologie définie par la norme n.a. canonique de $m(K)/c_0(K)$.

Les espaces suivantes sont fortement- τ -polaires ([6], p.197) :

1° Les espaces localement K -convexes de dimension finie ou dénombrable;

2° Les espaces localement K -convexes avec une base de Schauder;

3° Les espaces localement K -convexes munis de la topologie faible.

Une caractérisation importante de la classe des espaces fortement- τ -polaires est le prolongement des formes linéaires continues:

Théorème 1.1. ([6], théorème 4.2.)

Soit (E, τ) un espace localement K -convexe; les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) E est fortement- τ -polaire;

(ii) Vérifie la propriété de Hahn-Banach:

Soient D un espace de E , p une semi-norme n.a. sur E , $\varepsilon > 0$ et $f \in D'$ telle que $|f| \leq p$ sur D , il existe $\bar{f} \in E'$ un prolongement de f telle que $|\bar{f}| \leq (1 + \varepsilon)p$ sur E .

§2. Dualité séparante

Soient X et Y deux K -espaces vectoriels mis en dualité séparante $\langle X, Y \rangle$.

Si A est un sous-ensemble de X , $A^\circ = \{y \in Y / |\langle x, y \rangle| \leq 1 \quad \forall x \in A\}$ est appelé le polaire de A . On définit d'une façon symétrique le polaire d'un sous-ensemble de Y . Si A est un sous-ensemble de X et B est un sous-ensemble de Y , on a: B° absorbe A si, et seulement, A° absorbe B .

La topologie faible $\sigma(X, Y)$ sur X admet $\{A^\circ / A \in \mathcal{F}\}$ comme S.F.V. de 0, où \mathcal{F} est l'ensemble des parties finies de Y .

On montre que Y est isomorphe au dual topologique faible de X par l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcll} \psi : Y & \longrightarrow & (X, \sigma(X, Y))' & \\ y & \longrightarrow & f_y : X & \longrightarrow K \\ & & x & \longrightarrow \langle x, y \rangle \end{array}$$

Proposition 2.1. Soit A un sous-ensemble de X .

1° A° est absolument K -convexe et $\sigma(Y, X)$ -fermé;

\mathcal{P} A est $\sigma(X, Y)$ -borné si, et seulement si, A° est absorbant;

\mathcal{P} Si A est absorbant, A° est $\sigma(Y, X)$ -borné.

Soient τ une topologie sur X et H un sous-ensemble de Y ; on dit que H est τ -équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe U un voisinage de 0 tel que $|\langle U, H \rangle| \leq \varepsilon$.

Si H est τ -équicontinu, $\Gamma(H)$ est τ -équicontinue et H est $\sigma(Y, X)$ -borné.

Proposition 2.2. Soient τ une topologie sur X et H un sous-ensemble de Y ; les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) H est τ -équicontinu;

(ii) H est contenu dans le polaire d'un voisinage de 0;

(iii) H° est un voisinage de 0.

Si U est un voisinage de 0, U° est τ -équicontinu.

Théorème 2.1. Soit B un sous-ensemble de Y ; pour que B soit $\sigma(Y, X)$ -relativement compact il faut, et il suffit, que pour tout $x \in X$ $B(x) = \{\langle x, y \rangle / y \in B\}$ soit relativement compact dans K .

Preuve. Soit K^X l'espace de toutes les applications de X dans K muni de la topologie de la convergence simple τ_s . Un S.F.V. de 0 pour τ_s est formé par les ensembles $W(A, n) = \left\{ f \in K^X / |f(A)| \leq \frac{1}{\rho^n} \right\}$ où $n \in \mathbf{N}$ et A décrit l'ensemble des parties finies de X .

$W(A, n) \cap Y = \frac{1}{\lambda_n} A^\circ$; donc $\tau_{s/Y} = \sigma(Y, X)$, et le résultat découle de ([8], théorème 4.2.).

Proposition 2.3. Soit B un sous-ensemble de Y .

1° Supposons que K soit local; si B est $\sigma(Y, X)$ -borné, B est $\sigma(Y, X)$ -relativement compact.

2° Supposons que K soit sphériquement complet; si B est absolument K -convexe et $\sigma(Y, X)$ -borné, B est $\sigma(Y, X)$ -relativement C -compact.

Preuve. 1° Pour tout $x \in X$, $B(x) = \{\langle x, y \rangle / y \in B\}$ est borné dans K , donc relativement compact, et par suite B est $\sigma(Y, X)$ -relativement compact.

2° Pour tout $x \in X$, $B(x)$ est absolument K -convexe et borné dans K , donc $\overline{B(x)}$ est C -compact, et alors B est contenu dans un sous-ensemble A absolument K -convexe et $\sigma(Y, X)$ - C -compact ([7]). A est donc $\sigma(Y, X)$ -fermé, et alors B est $\sigma(Y, X)$ -relativement C -compact.

Corollaire 2.1. *Soit Aun sous-ensemble absorbant de X.*

1° Si K est local, A° est $\sigma(Y, X)$ -compact.

2° Si K est sphériquement complet, A° est $\sigma(Y, X)$ - C -compact.

Soit A un sous ensemble de X , $A^{\circ\circ} = \{x \in X / |\langle x, y \rangle| \leq 1 \ \forall y \in A^\circ\}$ est appelé le bipolaire de A . On définit de la même façon le bipolaire d'un sous-ensemble de Y .

$A^{\circ\circ}$ est absolument K -convexe et $\sigma(X, Y)$ -borné.

Proposition 2.4. *Soit Aun sous-ensemble de X*

1° Si A est $\sigma(X, Y)$ -borné, $A^{\circ\circ}$ est $\sigma(X, Y)$ -borné.

2° A° est $\sigma(Y, X)$ -borné si, et seulement si, $A^{\circ\circ}$ est absorbant.

Soit A un sous-ensemble de X ; on dit que A est Y -fermé si pour tout $x \in X \setminus A$, il existe $y \in Y$ tel que $|\langle x, y \rangle| > 1$ et $|\langle A, y \rangle| \leq 1$.

X est Y -fermé; et pour tous $y \in Y$ et $n \in \mathbf{Z}$ $B_n(y) = \{x \in X / |\langle x, y \rangle| \leq \rho^n\}$ est Y -fermé. L'intersection de sous-ensembles Y -fermés est un sous-ensemble Y -fermé. On appelle enveloppe Y -fermée d'un sous-ensemble A de X le plus petit sous-ensemble Y -fermé contenant A , on la note \tilde{A} .

Proposition 2.5. *Soit Aun sous-ensemble de X.*

1° $\tilde{A} = A^{\circ\circ}$.

2° A est Y -fermé si, et seulement si, $A = A^{\circ\circ}$.

3° Si A est $\sigma(X, Y)$ -borné, \tilde{A} est $\sigma(X, Y)$ -borné et c'est le plus petit sous-ensemble Y -fermé et $\sigma(X, Y)$ -borné contenant A .

Proposition 2.6. *Supposons que Ksoit sphériquement complet, et soit Aun sous-ensemble de X absolument K-convexe et $\sigma(X, Y)$ -fermé.*

1° Si K est discret, A est Y -fermé et on a: $A^{\circ\circ} = A$.

2° Si K est dense, $A^{\circ\circ} \subset \alpha A \ \forall |\alpha| > 1$.

Preuve.1° Soit $x_0 \in X \setminus A$, il existe une forme linéaire $\sigma(X, Y)$ -continue sur X telle que $|f(x_0)| > 1$ et $|f(A)| \leq 1$ ([8], théorème 3.10).

Soit $y_0 \in Y$ tel que $f = fy_0$, on a $|\langle x_0, y_0 \rangle| > 1$ et $|\langle A, y_0 \rangle| \leq 1$.

2° Soient $|\alpha| > 1$ et $x_0 \in X \setminus \alpha A$, il existe une forme linéaire $\sigma(X, Y)$ -continue telle que $f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right) = 1$ et $|f(A)| \leq 1$ ([8], théorème 3.10).

Alors il existe $y_0 \in Y$ tel que $|\langle x_0, y_0 \rangle| = |\alpha| > 1$ et $|\langle A, y_0 \rangle| \leq 1$; donc $x_0 \notin A^\circ$.

Proposition 2.7. Soient $\langle X, Y \rangle$ et $\langle R, S \rangle$ deux dualités séparantes sur K et

$u : X \longrightarrow R$ une application linéaire.

u est $(\sigma(X, Y), \sigma(R, S))$ -continue si, et seulement si, $u^*(S) \subset Y$; où u^* est l'adjoint algébrique de u . Dans ce cas la restriction u' de u^* sur S est $(\sigma(S, R), \sigma(Y, X))$ -continue, et $u'' = (u')' = u$.

Preuve. ([5], p.128).

Proposition 2.8. Soient $\langle X, Y \rangle$ et $\langle R, S \rangle$ deux dualités séparantes sur K , et

$u : X \longrightarrow R$ une application linéaire $(\sigma(X, Y), \sigma(R, S))$ -continue.

$$1^\circ [u(A)]^\circ = (u')^{-1}(A^\circ) \quad \forall A \subset X;$$

$$2^\circ u(A) \subset B \Rightarrow u(B^\circ) \subset A^\circ \quad \forall A \subset X \text{ et } \forall B \subset R;$$

$$3^\circ u^{-1}(D^\circ) = [u'(D)]^\circ \quad \forall D \subset S;$$

$$4^\circ u'(D) \subset C \Rightarrow u(C^\circ) \subset D^\circ \quad \forall D \subset S \text{ et } \forall C \subset Y.$$

Soient $\langle X, Y \rangle$ et $\langle R, S \rangle$ deux dualités séparantes sur K , et soient

$$\pi : X \longrightarrow R \text{ et}$$

$\delta : R \longrightarrow X$ deux applications linéaires telles que $\pi \circ \delta = id_R$. Si π est $(\sigma(X, Y), \sigma(R, S))$ -continue et δ est $(\sigma(R, S), \sigma(X, Y))$ -continue, alors $\pi^*(S) \subset Y$ et $\delta^*(Y) \subset S$. Posons $\pi' = \pi^*_{/S}$ et $\delta' = \delta^*_{/Y}$. On a $\delta' \circ \pi' = id_S$.

Proposition 2.9. Soient π et δ deux applications linéaires définies comme ci-dessus, et soient τ une topologie sur X et τ_δ la topologie image réciproque de τ par δ définie sur R .

Si τ admet comme S.F.V. de 0 $\{A^\circ / A \in \mathcal{A}\}$ où \mathcal{A} est une famille de sous-ensembles de Y , τ_δ admet comme S.F.V. de 0 $\{[\delta'(A)]^\circ / A \in \mathcal{A}\}$.

Preuve. Soit V un voisinage de 0 pour τ_δ , il existe U un voisinage de 0 pour τ tel que $\delta^{-1}(U) \subset V$. Soit $A \in \mathcal{A}$ et que $A^\circ \subset U$; on a $\delta^{-1}(A^\circ) \subset V$, d'où $[\delta'(A)]^\circ \subset V$ (proposition 2.8.).

§3. Topologies polaires

Soit \mathcal{A} une famille de sous-ensembles de Y $\sigma(Y, X)$ -bornés vérifiant:

(a) \mathcal{A} est filtrante à droite par inclusion;

(b) $Y = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$;

(c) Il existe $\lambda_0 \in K$, $|\lambda_0| > 1$, tel que $\lambda_0 A \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

On appelle topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X la topologie admettant comme S.F.V. de 0 $\{A^\circ / A \in \mathcal{A}\}$.

La topologie polaire de \mathcal{A} -convergence ne change pas si on remplace \mathcal{A} par:

1° L'ensemble des intersections finies des éléments de \mathcal{A} ;

2° L'ensemble des enveloppes absolument K -convexes des éléments de \mathcal{A} ;

3° L'ensemble des parties des éléments de \mathcal{A} ;

4° L'ensemble des sommes finies des éléments de \mathcal{A} ;

5° L'ensemble des réunions finies des éléments de \mathcal{A} ;

6° L'ensemble des adhérences faibles des éléments de \mathcal{A} .

Ainsi, au besoin, on peut supposer que \mathcal{A} vérifie une ou plus de ces propriétés.

En particulier, si \mathcal{A} est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Y :

1° absolument K -convexes et $\sigma(Y, X)$ -compacts, on a la topologie de Mackey $\tau_m(X, Y)$;

2° absolument K -convexes, $\sigma(Y, X)$ -bornés et $\sigma(Y, X)$ - C -compacts, on a la topologie C -compacte $\tau_c(X, Y)$;

3° $\sigma(Y, X)$ -bornés et X -fermés, on a la topologie X -fermée $\tau_f(X, Y)$;

4° $\sigma(Y, X)$ -bornés, on a la topologie forte $\tau_b(X, Y)$.

On a: $\sigma(X, Y) \leq \tau_m(X, Y) \leq \tau_c(X, Y) \leq \tau_b(X, Y)$;

$\sigma(X, Y) \leq \tau_f(X, Y) \leq \tau_b(X, Y)$.

Exemple 3.1. Soient $m(K)$ l'ensemble de toutes les suites bornées dans K et $c_0(K)$ l'ensemble de toutes les suites nulles dans K munis de

la norme n.a. $\|(x_i)\|_\infty = \sup_i |x_i|$. On considère la dualité séparante $\langle m(K), c_0(K) \rangle$.

La topologie forte $\tau_b(m(K), c_0(K))$ est déterminée par la norme n.a. $\|(x_i)\| = \sup \{ |x_i y_i| \mid (y_i) \in c_0(K) \text{ et } \|(y_i)\| \leq 1 \}$. Or $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$; donc la topologie forte $\tau_b(m(K), c_0(K))$ coïncide avec la topologie définie par la norme n.a. $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 3.1. *Toute topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X est une topologie localement K -convexe.*

Preuve. Soit τ une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X ; pour tout $A \in \mathcal{A}$, \mathcal{A}° est absolument K -convexe, il suffit donc de montrer que τ est une topologie vectorielle. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, \mathcal{A}° est absorbant et équilibré, $A^\circ + A^\circ \subset A^\circ$ et $\frac{1}{\lambda_0} A^\circ = (\lambda_0 A)^\circ \in \mathcal{A}^\circ$; de plus, \mathcal{A}° est une base de filtre sur X , donc \mathcal{A}° est un S.F.V. de 0 pour une topologie vectorielle sur X ([5], p.14).

Définition 3.1. *Soit τ une topologie vectorielle sur X ; on dit que τ est une topologie polaire s'il existe une famille \mathcal{A} de sous-ensembles $\sigma(Y, X)$ -bornés de Y vérifiant les conditions (a), (b) et (c) et telle que τ soit une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence.*

Si τ est une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X , elle est définie par la famille de semi-normes n.a. $(p_A)_{A \in \mathcal{A}}$, avec $p_A(x) = \sup \{ |\langle x, y \rangle| \mid y \in A \}$.

Si K est sphériquement complet, on a la réciproque de la proposition 3.1.

Proposition 3.2. *Si K est sphériquement complet, la topologie de tout espace localement K -convexe est une topologie polaire.*

Preuve. Soient (E, τ) un espace localement K -convexe et \mathcal{U} un S.F.V. de 0 formé de sous-ensembles absolument K -convexes, absorbants et τ -fermés. Considérons la dualité séparante $\langle E, E' \rangle$. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, U° est $\sigma(E', E)$ -borné; posons $\mathcal{A} = \{U^\circ \mid U \in \mathcal{U}\}$. \mathcal{A} vérifie les conditions (a), (b) et (c), et on a pour tout $U \in \mathcal{U}$, $U^{\circ\circ} = U$; donc τ est la topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur E .

Remarque 3.1. Soit (E, τ) un espace localement K -convexe; si E est τ -polaire, τ admet un S.F.V de 0 formé par des sous-ensembles E' -fermés, et alors τ est une topologie polaire sur E .

Théorème 3.1. Supposons que K soit sphériquement complet, et soit τ une topologie vectorielle sur X ; pour que τ soit une topologie polaire il faut, et il suffit, que τ admette un S.F.V de 0 formé de sous-ensembles absolument K -convexes, absorbants et $\sigma(X, Y)$ -fermés. .

Preuve. La condition nécessaire est évidente; pour la condition suffisante, soit \mathcal{U} un S.F.V de 0 pour τ formé de sous-ensembles absolument K -convexes, absorbants et $\sigma(X, Y)$ -fermés. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, U° est $\sigma(Y, X)$ -borné; posons $\mathcal{A} = \{U^\circ / U \in \mathcal{U}\}$. \mathcal{A} satisfait les conditions (a), (b) et (c). Soit τ' la topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X .

Pour tout $U \in \mathcal{U}$, $U \subset U^{\circ\circ}$, donc $\tau \geq \tau'$; U est absolument K -convexe et $\sigma(X, Y)$ -fermé, donc $\lambda U^{\circ\circ} \subset U$ pour $|\lambda| < 1$ (proposition 2.6.), et alors $\tau' \geq \tau$.

Proposition 3.3. Soit τ une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X , si $\tilde{\tau}$ désigne la topologie polaire de $\tilde{\mathcal{A}}$ -convergence sur X , alors τ coïncide avec $\tilde{\tau}$.

Preuve. $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A} / A \in \mathcal{A}\}$ est une famille de sous-ensembles $\sigma(Y, X)$ -bornés qui vérifie les conditions (a), (b) et (c), et on a pour tout $A \in \mathcal{A}$, $(\tilde{A})^\circ = A^{\circ\circ} = A^\circ$.

Remarque 3.2. Si τ est une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X , on peut supposer que A est Y -fermé pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Proposition 3.4. 1° Si K est local, la topologie forte $\tau_b(X, Y)$ coïncide avec la topologie de Mackey $\tau_m(X, Y)$.

2° Si K est sphériquement complet, la topologie forte $\tau_b(X, Y)$ coïncide avec la topologie C -compacte $\tau_c(X, Y)$.

Preuve. 1° Soit A un sous-ensemble $\sigma(Y, X)$ -borné de Y ; $\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(Y, X)}$ est $\sigma(Y, X)$ -borné et $\sigma(Y, X)$ -fermé, donc $\sigma(Y, X)$ -compact (proposition 2.3.), et on a $A^\circ = \left[\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(Y, X)} \right]^\circ$.

2° D'une façon analogue.

Définition 3.2. Soit \mathcal{A} une famille de sous-ensemble de Y ; on dit que \mathcal{A} est saturée si: $A \in \mathcal{A}$ et $B \subset A^{\circ\circ} \Rightarrow B \in \mathcal{A}$.

Si \mathcal{A} est une famille de sous-ensemble de Y , l'enveloppe saturée de \mathcal{A} est la plus petite famille saturée contenant \mathcal{A} ; on la note $Sa(\mathcal{A})$.

$$Sa(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \subset \mathcal{Y} / \exists \mathcal{A} \in \mathcal{A} : \mathcal{B} \subset \mathcal{A}^{\circ\circ}\}.$$

Proposition 3.5. Soit τ une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X ; τ coïncide avec la topologie polaire de $Sa(\mathcal{A})$ -convergence.

Preuve. Pour tout $B \in Sa(\mathcal{A})$, \mathcal{B} est $\sigma(Y, X)$ -borné, et $Sa(\mathcal{A})$ satisfait les conditions (a), (b) et (c). Soit $B \in Sa(\mathcal{A})$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $B \subset A^{\circ\circ}$, et alors $A^{\circ} \subset B^{\circ}$.

Remarque 3.3. Pour une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X ; on peut supposer que \mathcal{A} soit une famille saturée.

Proposition 3.6. Soit τ (resp τ') une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence (resp. \mathcal{B} -convergence) sur X ; si \mathcal{A} est saturée, on a: $\tau \geq \tau'$ si, et seulement si, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$.

Preuve. Soit $B \in \mathcal{B}$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $A^{\circ} \subset B^{\circ}$, donc $B \subset B^{\circ\circ} \subset A^{\circ\circ}$, et alors $B \in \mathcal{A}$.

Corollaire 3.1. Soit τ (resp τ') une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence (resp. \mathcal{B} -convergence); pour que τ coïncide avec τ' il faut, et il suffit, que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Preuve. On peut supposer que \mathcal{A} et \mathcal{B} soient saturées (remarque 3.3.).

Maintenant, on va comparer les ensembles complets pour deux topologies polaires comparables; on donne d'abord le lemme suivant:

Lemme 3.1. Soient E un K -espace vectoriel et τ, τ' deux topologies vectorielles sur E telles que τ' admette un S.F.V. de 0τ -fermés. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une suite généralisée de Cauchy dans (E, τ') telle qu'elle converge vers x_0 dans (E, τ) , alors $(x_i)_{i \in I}$ converge vers x_0 dans (E, τ') .

Preuve. Soit U un voisinage de 0 τ -fermé dans (E, τ') ; il existe $i_0 \in I$ tel que $x_i - x_j \in U \quad \forall i, j \geq i_0$. U est τ -fermé, donc $x_i - x_0 \in U \quad \forall i \geq i_0$, et par suite $(x_i)_{i \in I}$ converge vers x_0 dans (E, τ') .

Théorème 3.2. Soient τ et τ' deux topologies polaires sur X telles que τ soit moins fine que τ' ; si M est un sous-ensemble de X τ -complet, M est τ' -complet.

Preuve. τ' admet un S.F.V. de 0 $\sigma(X, Y)$ -fermés, donc τ -fermés. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une suite généralisée de Cauchy dans (M, τ') , elle est de Cauchy dans (M, τ) , donc elle converge vers x_0 dans (M, τ) ; et alors $(x_i)_{i \in I}$ converge vers x_0 dans (M, τ') (Lemme 3.1.).

Proposition 3.7. Soient π et δ les applications linéaires de la proposition 2.9.; si τ est une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X et τ_δ est la topologie image réciproque de τ par δ sur R ; on a :

1° τ_δ est la topologie polaire de $\delta'(\mathcal{A})$ -convergence sur R .

2° π est (τ, τ_δ) -continue si, et seulement si, $\pi' o \delta'(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Preuve. 1° $(\delta')^*(R) \subset X$, donc δ' est $(\sigma(Y, X), \sigma(S, R))$ -continue. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\delta'(A)$ est $\sigma(S, R)$ -borné. δ' est surjective, donc $\delta'(\mathcal{A})$ recouvre S ; de plus, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\delta^{-1}(A^\circ) = [\delta'(A)]^\circ$ (proposition 2.8.). Donc τ_δ est la topologie polaire de $\delta'(\mathcal{A})$ -convergence.

2° On peut supposer que $A^{\circ\circ} = A$ et $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Supposons que π soit (τ, τ_δ) -continue, et soit $A \in \mathcal{A}$, $\pi^{-1}([\delta'(A)]^\circ)$ est un voisinage de 0 dans (X, τ) ; il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $B^\circ \subset \pi^{-1}([\delta'(A)]^\circ) = [\pi' o \delta'(A)]^\circ$, donc $\pi' o \delta'(A) \subset B^{\circ\circ} = B$, et par suite $\pi' o \delta'(A) \in \mathcal{A}$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{A}$, $\pi^{-1}([\delta'(A)]^\circ) = [\pi' o \delta'(A)]^\circ$ est un voisinage de 0 dans (X, τ) ; donc π est (τ, τ_δ) -continue.

Proposition 3.8. Si τ est la topologie faible (resp. de Mackey; resp. C -compacte; resp. X -fermée; resp. forte) sur X , τ_δ est la topologie faible (resp. de Mackey; resp. C -compacte; resp. X -fermée; resp. forte) sur R .

Preuve. Supposons que τ soit la topologie de Mackey sur X . δ' est $(\sigma(Y, X), \sigma(S, R)$ -continue, donc pour tout $A \in \mathcal{A}$ $\delta'(\mathcal{A})$ est $\sigma(S, R)$ -borné. Si A est absolument K -convexe et $\sigma(S, R)$ -compact dans Y , $\delta'(A)$ est absolument K -convexe et $\sigma(S, R)$ -compact dans S .

Réciproquement, si B est absolument K -convexe et $\sigma(S, R)$ -compact dans R ; posons $A = \pi'(B)$; π' est $(\sigma(S, R), \sigma(Y, X))$ -continue, donc A est absolument K -convexe et $\sigma(Y, X)$ -compact dans Y , et on a $\delta'(A) = B$. Donc τ_δ est la topologie de Mackey sur R .

La démonstration est analogue pour les autres; pour la topologie X -fermée, on utilise les relations de la proposition 2.8.

§4. Topologies compatibles

Une topologie localement K -convexe τ sur X est dite compatible avec la dualité $\langle X, Y \rangle$, ou (X, Y) -compatible, si Y est isomorphe au dual topologique de X muni de la topologie τ .

La topologie faible $\sigma(X, Y)$ est la topologie la moins fine parmi les topologies (X, Y) -compatibles, et on montre qu'il existe une topologie notée $\tau(X, Y)$ qui est la plus fine parmi les topologies (X, Y) -compatibles, c'est la topologie borne supérieure de toutes les topologies (X, Y) -compatibles.

Exemple 4.1. Soient $\omega(K)$ l'ensemble de toutes les suites dans K et $\varphi(K)$ l'ensemble des suites finies dans K . $\omega(K)$ peut être identifié au produit $\prod_{i \geq 1} K_i$, avec $K_i = K \forall i \geq 1$. On munit $\omega(K)$ de la topologie produit τ_ω , et on considère la dualité séparante $\langle \omega(K), \varphi(K) \rangle$. La topologie τ_ω coïncide avec la topologie faible $\sigma(\omega(K), \varphi(K))$. $\omega(K)$ est τ_ω -complet (K est complet), donc il est $\sigma(\omega(K), \varphi(K))$ -complet, et alors la topologie forte $\tau_b(\omega(K), \varphi(K))$ coïncide avec la topologie faible $\sigma(\omega(K), \varphi(K))$. Donc toutes les topologies polaires sur $\omega(K)$ sont $(\omega(K), \varphi(K))$ -compatibles.

Exemple 4.2. Considérons la dualité séparante $\langle c_0(K), m(K) \rangle$. On a $(c_0(K), \|\cdot\|_\infty)' = m(K)$ ([3], p.65); donc la topologie définie sur $c_0(K)$ par la norme n.a. $\|\cdot\|_\infty$ est $(c_0(K), m(K))$ -compatible.

Proposition 4.1. *Supposons que K soit sphériquement complet, et*

soient τ une topologie (X, Y) -compatible sur X et A un sous-ensemble de X absolument K -convexe et τ -fermé.

1° Si K est discret, A est Y -fermé.

2° Si K est dense, $A^{\circ\circ} \subset \alpha A \quad \forall |\alpha| > 1$.

Théorème 4.1. *Supposons que K soit sphériquement complet, et soit τ une topologie (X, Y) -compatible sur X ; τ possède un S.F.V. de 0 formé de sous-ensembles absolument K -convexes et Y -fermés.*

Preuve. Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes n.a. sur X définissant la topologie τ . Un S.F.V. de 0 pour τ est formé par les intersections finies des ensembles $U(i, n) = \left\{ x \in X / P_i(x) \leq \frac{1}{\rho^n} \right\}$ où $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

$U(i, n)$ est absolument K -convexe, et on montre qu'il est Y -fermé.

Proposition 4.2. *Soient τ une topologie (X, Y) -compatible et A un sous-ensemble de Y .*

1° A° est τ -fermé.

2° $A^\circ = \left[\overline{\Gamma(A)} \right]^\circ$.

Preuve. 1° $A^\circ = \bigcap_{y \in A} y^{-1}(\overline{B}_K(0, 1))$, et y est τ -continue $\forall y \in Y$.

2° Soit $y \in A^\circ$; $A \subset A^{\circ\circ} \subset y^\circ$. y° est absolument K -convexe et τ -fermé, donc $\overline{\Gamma(A)} \subset y^\circ$, et alors $y \in y^{\circ\circ} \subset \left[\overline{\Gamma(A)} \right]^\circ$.

Proposition 4.3. *Soient τ une topologie (X, Y) -compatible et p une semi-norme n.a. sur X . Pour que p soit τ -polaire il faut, et il suffit, que $\overline{B}_p(0, 1)$ soit Y -fermée.*

Preuve. Découle de la proposition 1.2.(iv).

Proposition 4.4. *Soient τ une topologie (X, Y) -compatible, U un voisinage absolument K -convexe de 0 et p une semi-norme n.a. associée à U .*

Si U est Y -fermé, p est τ -polaire.

Preuve. Si K est discret, $U = \overline{B}_p(0, 1)$, et alors p est τ -polaire.

Si K est dense, $B_p(0, 1) \subset U \subset \overline{B}_p(0, 1)$. Soit $x \notin \overline{B}_p(0, 1)$, $x \notin U$, alors il existe $y \in Y$ tel que $|\langle x, y \rangle| > 1$ et $|\langle U, y \rangle| \leq 1$.

Supposons qu'il existe $z \in X$ tel que $p(z) = 1$ et $|\langle z, y \rangle| > 1$.

Soit $\lambda \in K$ tel que $|\langle z, y \rangle| > |\lambda| > 1$. $\left| \left\langle \frac{z}{\lambda}, y \right\rangle \right| > 1$ et $p\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \frac{1}{|\lambda|} < 1$ ce qui est absurde; donc $\left| \left\langle \overline{B_p}(0, 1), y \right\rangle \right| \leq 1$.

Théorème 4.2. *Soit τ une topologie (X, Y) -compatible; pour que X soit fortement- τ -polaire il faut, et il suffit, que tout sous-ensemble τ -fermé et K -fermé soit Y -fermé.*

Preuve. Analogue à celle de ([6], théorème 4.7.).

Corollaire 4.1. *Les topologies τ (X, Y) -compatibles telles que X soit fortement- τ -polaire admettent les mêmes sous-ensembles τ -fermés et K -fermés.*

Corollaire 4.2. *Soit τ une topologie (X, Y) -compatible, si X est fortement- τ -polaire, on a:*

- 1° *Tout sous-ensemble K -fermé et τ -fermé est $\sigma(X, Y)$ -fermé;*
- 2° *Tout sous-espace τ -fermé est $\sigma(X, Y)$ -fermé.*

Proposition 4.5. *Soient τ une topologie (X, Y) -compatible et A un sous-ensemble de X absolument K -convexe; si X est fortement- τ -polaire, on a: $Kf(\overline{A}) = A^{\circ\circ}$.*

Preuve. $Kf(\overline{A})$ est τ -fermé et K -fermé, donc Y -fermé (théorème 4.2.), et alors $A^{\circ\circ} = \tilde{A} \subset Kf(\overline{A})$. D'autre part, $A^{\circ\circ}$ est τ -fermé et K -fermé, donc $Kf(\overline{A}) \subset A^{\circ\circ}$.

Corollaire 4.3. *Soit A un sous-ensemble de X absolument K -convexe, on a: $Kf(\overline{A}^{\sigma(X, Y)}) = A^{\circ\circ}$.*

Maintenant, on va caractériser les topologies τ (X, Y) -compatibles telles que X soit τ -polaire.

Théorème 4.3. *Soit τ une topologie localement K -convexe sur X ; si X est τ -polaire, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (i) *τ est (X, Y) -compatible;*
- (ii) *τ est une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence, où \mathcal{A} est formée de sous-ensembles de Y $\sigma(Y, X)$ -bornés et X -fermés.*

Preuve. (i) \Rightarrow (ii). Soit \mathcal{P} la famille filtrante et stable par multiplication par un scalaire de semi-normes n.a. définissant la topologie τ .

Pour tout $p \in \mathcal{P}$ posons $A_p = \{y \in Y / |\langle x, y \rangle| \leq p(x) \quad \forall x \in X\}$; et soit $\mathcal{A} = \left\{ \mathcal{A} / \bigvee \bigvee \in \mathcal{P} \right\}$. \mathcal{A} est filtrante à droite par inclusion.

Pour tout $x \in X$ $|\langle x, A_p \rangle| \leq p(x)$, donc A_p est $\sigma(Y, X)$ -borné.

Soit $y \in Y$, y est τ -continue; il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $|\langle x, y \rangle| \leq p(x) \quad \forall x \in X$, donc $y \in A_p$. En outre, pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $p \in \mathcal{P}$ on $\lambda A_p = A_{|\lambda|p}$. Soit τ' la topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X ; τ' est définie par la famille de semi-normes n.a. $(q_{A_p})_{p \in \mathcal{P}}$, avec $q_{A_p}(x) = \sup \{|\langle x, y \rangle| / y \in A_p\}$.

Comme p est τ -polaire $\forall p \in \mathcal{P}$, on a $q_{A_p} = p$; et alors $\tau' = \tau$.

D'autre part, pour tout $p \in \mathcal{P}$ A_p est K -fermé et $A_p = \bigcap_{x \in X} x^{-1}(\overline{B}_p(0, p(x)))$ est $\sigma(Y, X)$ -fermé, donc A_p est X -fermé (Y est fortement- $\sigma(Y, X)$ -polaire).

(ii) \Rightarrow (i) τ est une topologie polaire, donc $\sigma(X, Y) \leq \tau$, et alors $Y \subset X'$.

Soit $f \in X'$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $|f(A^\circ)| \leq 1$, donc $f \in A^{\circ\circ}$ dans la dualité séparante $\langle X, X' \rangle$. A est X -fermé, donc A est K -fermé et $\sigma(Y, X)$ -fermé, alors A est $\sigma(X', X)$ -fermé, d'où A est X -fermé dans la dualité séparante $\langle X, X' \rangle$ (X' est fortement- $\sigma(X', X)$ -polaire), et par suite $f \in A \subset Y$.

Si K est sphériquement complet, on a le résultat suivant:

Théorème 4.4. *Supposons que K soit sphériquement complet; si τ est une topologie localement K -convexe sur X , les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) τ est (X, Y) -compatible;

(ii) τ est une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence, où \mathcal{A} est formée de sous ensembles de Y absolument K -convexes, $\sigma(Y, X)$ -bornés et $\sigma(Y, X)$ - C -compacts.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii). Soit τ une topologie (X, Y) -compatible, τ possède un S.F.V. de 0, \mathcal{U} formé de sous-ensembles absolument K -convexes et Y -fermés (théorème 4.1). Posons $\mathcal{A} = \{U^\circ / U \in \mathcal{U}\}$, alors τ est la topologie polaire de \mathcal{A} -convergence sur X ; et pour tout $U \in \mathcal{U}$, U° est

absolument K -convexe, $\sigma(Y, X)$ -borné (U est absorbant) et $\sigma(Y, X)$ - C -compact (corollaire 2.1.).

(ii) \Rightarrow (i). On a $Y \subset X'$; soit $f \in X'$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $|f(A^\circ)| \leq 1$.

Donc $f \in A^{\circ\circ}$ dans la dualité séparante $\langle X, X' \rangle$. A est absolument K -convexe et $\sigma(Y, X)$ - C -compact, donc A est $\sigma(Y, X)$ -fermé, et alors A est $\sigma(X', X)$ -fermé dans X' , et on a $A^{\circ\circ} \subset \alpha A \subset Y$ pour $|\alpha| > 1$, donc $f \in Y$.

On démontre de la même façon le théorème suivant:

Théorème 4.5. *Supposons que K soit local; si τ est une topologie localement K -convexe sur X , les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (i) τ est (X, Y) -compatible;
- (ii) τ est une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence, où \mathcal{A} est formée de sous-ensembles de Y absolument K -convexes et $\sigma(Y, X)$ -compacts.

Corollaire 4.4. *1° la topologie X -fermée $\tau_f(X, Y)$ est la topologie la plus fine parmi toutes les topologies τ (X, Y) -compatibles telles que X soit τ -polaire.*

2° Si K est sphériquement complet, la topologie C -compact $\tau_c(X, Y)$ est la topologie la plus fine parmi toutes les topologies (X, Y) -compatibles.

3° Si K est local, la topologie de Mackey $\tau_m(X, Y)$ est la topologie la plus fine parmi toutes les topologies (X, Y) -compatibles.

Pour les sous-ensembles bornés, on a le théorème suivant:

Théorème 4.6. *Supposons que Y soit $\sigma(Y, X)$ -complet, et soit τ une topologie (X, Y) -compatible telle que X soit τ -polaire. Pour qu'un sous-ensemble de X soit τ -borné il faut, et il suffit, qu'il soit $\sigma(X, Y)$ -borné.*

2. Preuve

τ est une topologie polaire de \mathcal{A} -convergence, où \mathcal{A} est formée de sous-ensembles $\sigma(Y, X)$ -bornés et X -fermés (théorème 4.3.). Soit M un sous-ensemble $\sigma(Y, X)$ -borné; M° est absolument- K -convexe, absorbant et $\sigma(Y, X)$ -fermé. Soit $A \in \mathcal{A}$, A est $\sigma(Y, X)$ -fermé, donc A est $\sigma(Y, X)$ -complet, et alors il existe $\lambda \in K$ tel que $A \subset \lambda M^\circ$ ([6],

lemme 7.6., donc $M \subset \lambda A^\circ$, et par suite M est τ -borné.

Corollaire 4.5. *Si Y est $\sigma(Y, X)$ -complet, toutes les topologies τ (X, Y) -compatibles telles que X soit τ -polaire admettent les mêmes sous-ensembles bornés.*

Proposition 4.6. *Supposons que K soit discret et sphériquement complet, et soient τ une topologie (X, Y) -compatible et A un sous-ensemble de X . Pour que A soit absolument K -convexe et τ -fermé il faut, et il suffit, que $A = A^{\circ\circ}$.*

Preuve. Si A est absolument K -convexe et τ -fermé, on a $A = A^{\circ\circ}$ (proposition 4.1.). Réciproquement, si $A = A^{\circ\circ}$, A est absolument K -convexe et $\sigma(X, Y)$ -fermé, donc τ -fermé.

Corollaire 4.6. *Si K est discret, les sous-ensembles absolument K -convexes et fermés sont les mêmes pour toutes les topologies (X, Y) -compatibles.*

Proposition 4.7. *Supposons que K soit dense et sphériquement complet, et soient τ une topologie (X, Y) -compatible et A un sous-ensemble de X absolument K -convexe et τ -fermé, on a: $\overline{A}^{\sigma(X, Y)} \subset Kf(A)$.*

Preuve. $A^{\circ\circ}$ est $\sigma(X, Y)$ -fermé, donc $\overline{A}^{\sigma(X, Y)} \subset A^{\circ\circ}$, et alors $\overline{A}^{\sigma(X, Y)} \subset Kf(A)$ (proposition 4.1.).

Corollaire 4.7. *Si K est dense et sphériquement complet, les sous-ensembles absolument K -convexes K -fermés et fermés sont les mêmes pour toutes les topologies (X, Y) -compatibles.*

§ 5. Espaces tonnelés et espaces réflexifs

Soit (E, τ) un espace localement K -convexe; on appelle τ -tonneau de E tout sous-ensemble de E absolument K -convexe, absorbant et τ -fermé. Et on dit que E est τ -tonnelé si tout τ -tonneau est un voisinage de 0.

Proposition 5.1. *Soit τ une topologie (X, Y) -compatible; si X est τ -tonnelé, tout sous-ensemble de Y $\sigma(Y, X)$ -borné est τ -équicontinu.*

Preuve. Soit H un sous-ensemble de Y $\sigma(Y, X)$ -borné; H° est absorbant, absolument K -convexe et $\sigma(X, Y)$ -fermé, donc τ -fermé, et alors H° est un τ -tonneau, donc un voisinage de 0.

La réciproque de cette proposition est vraie si le corps K est sphériquement complet:

Proposition 5.2. *Supposons que K soit sphériquement complet, et soit τ une topologie (X, Y) -compatible, si tout sous-ensemble de Y $\sigma(Y, X)$ -borné est τ -équicontinu, X est τ -tonnelé.*

Preuve. Soit A un τ -tonneau de X , A° est $\sigma(Y, X)$ -borné, donc $A^{\circ\circ}$ est un voisinage de 0; or $\alpha A^{\circ\circ} \subset A$ pour $|\alpha| < 1$ (proposition 4.1.), donc A est un voisinage de 0.

Proposition 5.3. *Toute topologie polaire admet un S.F.V. de 0 formé par des $\sigma(Y, X)$ -tonneaux.*

Proposition 5.4. *Si la topologie forte $\tau_b(X, Y)$ n'est pas (X, Y) -compatible, il n'existe pas de topologie τ (X, Y) -compatible telle que X soit τ -tonnelé.*

Preuve. Supposons qu'il existe une topologie τ (X, Y) -compatible telle que X soit τ -tonnelé. Soit A un sous-ensemble de Y $\sigma(Y, X)$ -borné, A est τ -équicontinu (proposition 5.1.), donc A° est un voisinage de 0 pour τ , et alors $\tau = \tau_b(X, Y)$, ce qui est absurde.

Corollaire 5.1. *Si la topologie forte $\tau_b(X, Y)$ est (X, Y) -compatible et X est $\tau_b(X, Y)$ -tonnelé, $\tau_b(X, Y)$ est l'unique topologie τ (X, Y) -compatible telle que X soit τ -tonnelé.*

Proposition 5.5. *Si K est sphériquement complet, X est $\tau_b(X, Y)$ -tonnelé.*

Preuve. $\tau_b(X, Y)$ est (X, Y) -compatible (proposition 3.4.), et le résultat découle de la proposition 5.2.

Si τ est une topologie (X, Y) -compatible, tout $\sigma(X, Y)$ -tonneau est un τ -tonneau. Pour la réciproque, si K est discret, donc sphériquement complet, les sous-ensembles de X absolument K -convexes et fermés

sont les mêmes pour toutes les topologies (X, Y) -compatibles (corollaire 4.6.), et alors tout τ -tonneau est un $\sigma(X, Y)$ -tonneau. Si K est dense et sphériquement complet, tout τ -tonneau K -fermé est un $\sigma(X, Y)$ -tonneau (corollaire 4.7.).

Proposition 5.6. *Supposons que K soit sphériquement complet, et soit τ une topologie (X, Y) -compatible, tout τ -tonneau de X contient un $\sigma(X, Y)$ -tonneau.*

Preuve. Soit A un τ -tonneau de X ; A est absolument K -convexe et τ -fermé, donc $\overline{A}^{\sigma(X, Y)} \subset \alpha A$ pour $|\alpha| > 1$ (proposition 4.1.).

$\frac{1}{\alpha} \overline{A}^{\sigma(X, Y)}$ est un $\sigma(X, Y)$ -tonneau, et on a $\frac{1}{\alpha} \overline{A}^{\sigma(X, Y)} \subset A$.

Définition 5.1. *Soit τ une topologie localement K -convexe sur X ; on dit que X est $f\tau$ -tonnelé si tout τ -tonneau Y -fermé est un voisinage de 0.*

Tout espace τ -tonnelé est $f\tau$ -tonnelé. Pour la réciproque, on a la proposition suivante:

Proposition 5.7. *Soit τ une topologie (X, Y) -compatible telle que X soit fortement- τ -polaire. Pour que X soit τ -tonnelé il faut, et il suffit, qu'il soit $f\tau$ -tonnelé.*

Preuve. Supposons que X soit $f\tau$ -tonnelé, et soit A un τ -tonneau de X , $Kf(A)$ est K -fermé et τ -fermé, donc il est Y -fermé (théorème 4.2.), et alors $Kf(A)$ est un voisinage de 0, donc A est un voisinage de 0.

Proposition 5.8. *Soit τ une topologie (X, Y) -compatible; les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (i) X est $f\tau$ -tonnelé;
- (ii) Si B est un sous-ensemble de Y $\sigma(Y, X)$ -borné, la semi-norme n.a. $p(x) = \sup \{|\langle x, y \rangle| / y \in B\}$ est τ -continue.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii). Soit B un sous-ensemble de Y $\sigma(Y, X)$ -borné; B° est un τ -tonneau Y -fermé, donc c'est un voisinage de 0, et on a $p(B^\circ) \leq 1$, donc p est τ -continue.

(ii) \Rightarrow (i). Soit U un τ -tonneau Y -fermé dans X . Posons: $p(x) = \sup \{|\langle x, y \rangle| / y \in U^\circ\}$; U° est $\sigma(Y, X)$ -borné. p est τ -continue, donc il existe V un voisinage de 0 tel que $p(V) \leq 1$; alors $V \subset U^{\circ\circ} = U$, et par suite U est un voisinage de 0.

Définition 5.2. *On dit que X est semi-réflexif si X est isomorphe au dual topologique fort de Y .*

Si X est semi-réflexif, toute forme linéaire sur Y qui est faiblement continue est fortement continue.

Proposition 5.9. *Pour que X soit semi-réflexif il faut, et il suffit, que la topologie forte sur Y soit (Y, X) -compatible.*

Exemple 5.1. Considérons la dualité séparante $\langle \varphi(K), \omega(K) \rangle$. D'après l'exemple 4.1, $\tau_b(\omega(K), \varphi(K))$ est $(\omega(K), \varphi(K))$ -compatible, donc $\varphi(K)$ est semi-réflexif.

Théorème 5.1. *Si tout sous-ensemble de X absolument K -convexe, $\sigma(X, Y)$ -borné et $\sigma(X, Y)$ -fermé est $\sigma(X, Y)$ - C -compact, alors*

$$\tau_b(Y, X) = \tau_c(Y, X).$$

Preuve. Soit A un sous-ensemble de X $\sigma(X, Y)$ -borné; $\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X, Y)}$ est absolument K -convexe, $\sigma(X, Y)$ -borné et $\sigma(X, Y)$ -fermé, donc il est $\sigma(X, Y)$ - C -compact, et alors $\left[\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(X, Y)}\right]^\circ = A^\circ$ est un voisinage de 0 pour $\tau_c(Y, X)$; d'où $\tau_b(Y, X) = \tau_c(Y, X)$.

Corollaire 5.2. *Si K est sphériquement complet, X est semi-réflexif.*

Preuve. Découle de la proposition 2.3., du théorème 4.4; et du théorème 5.1.

Définition 5.3. *Soit τ une topologie localement K -convexe sur X ; on dit que X est τ -réflexif si:*

- 1° X est semi-réflexif;
- 2° $\tau = \tau_b(X, X')$, où $X' = (X, \tau)'$.

Théorème 5.2. *Si K est sphériquement complet et τ est une topologie (X, Y) -compatible telle que X soit τ -tonnelé, alors X est τ -réflexif.*

Preuve. X est semi-réfléxif (corollaire 5.2.), X est $\tau_b(X, Y)$ -tonnelé (proposition 5.5.) et $\tau_b(X, Y)$ est (X, Y) -compatible (proposition 3.4.), alors $\tau = \tau_b(X, Y)$ (corollaire 5.1.). Donc $\tau = \tau_b(X, X')$.

References

- [1] I. Fleischer, sur les espaces normés non-archimédiens, Proc. Kond. Ned. Akad. V. Wetensch. A57, pp. 165-168, (1952).
- [2] A. W. Ingleton, the Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields, Proc. combridge Philos. Soc. 48, pp. 41-45, (1952).
- [3] A. F. Monna, analyse non-archimédienne, Springer-Verlag Berlin Heidel-Berg New York, (1970).
- [4] A. C. M. Rooij, non-archimedean functional analysis, Marcel Dekker, New York, (1978).
- [5] H. H. Schaefer, topological vector spaces, springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, (1971).
- [6] W. H. Schikhof, locally convex spaces over nonspherically complete valued I,II. Bull. soc. Math. Belg. Sér. B 38, pp. 187-224 (1986).
- [7] T. A. Springer, une notion de compacité dans la théorie des espaces vectoriels topologiques, Indag. Math. 27, pp. 182-190, (1965).
- [8] J. Van Tiel, Espaces localement K -convexes, I-III, Indag. Math. 27, pp. 249-289, (1965).

Received : March, 2001.

R. Ameziane Hassani

Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah-FES
FES - MAROC
MAROC
E-MAIL : ramezianehassani@hotmail.com

and

Mohammed Babahmed

Departement de Mathematiques
Faculté des Sciences de Tétouan
Université Abdelmalek Essaâdi-TETOUAN
B. P. 1796 (FES ATLAS)
FES - MAROC
MAROC
E-MAIL : babahmedmohammed@hotmail.com