Proyecciones
Vol. 19, N^o 3, pp. 227-248, December 2000.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile

SUR LE SPECTRE D'UN OPÉRATEUR QUASILINÉAIRE ELLIPTIQUE "DÉGÉNÉRÉ"

A. ANANE, A. BENAZZI and O. CHAKRONE
UNIVERSITÉ MOHAMED I, MAROC

Abstract

We study an eigenvalue problem involving an operator $\mathcal{A}_p^0$ that generalizes the pseudo-Laplacian Δ_p^0 and the p-Laplacian. In particular, we will prove the isolation and simplicity of the first eigenvalue. We will treat with more details the particular case of Δ_p^0 on a domaine Ω which is a cube.

1. Introduction

Nous nous intéressons à l'étude des valeurs propres λ et des fonctions propres associées u solutions du problème :

$$(VP)\begin{cases} \mathcal{A}_p^0 u = -\displaystyle\sum_{i,k,l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\sum_{r,s=1}^{N} a_{rs}^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_r}\frac{\partial u}{\partial x_s}\right)^{\frac{p-2}{2}} a_k^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] \\ \quad = \lambda m(x)|u|^{p-2}u \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbf{R}^N$, $1 < p < \infty$, m est une fonction poids et les $a_{kl}^i \in L^\infty(\Omega)$ sont des fonctions données. L'opérateur A_p^0 est une généralisation du p-Laplacien Δ_p et du pseudo-Laplacien

$$\Delta_p^0 u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

Nous montrons l'existence d'une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini, l'isolation et la simplicité de la première valeur propre.

Des travaux analogues ont été fait par Anane [1] pour l'opérateur Δ_p en 1987 contrairement au pseudo-Laplacien qui n'a jamais fait l'objet d'une telle étude en particulier, et l'opérateur $\mathcal{A}_p^0$ de manière générale. Signalons également l'amélioration apportée par Linqdvist sur le domaine pour l'étude de la simplicité de la première valeur propre de Δ_p.

2. Préliminaires

2.1. Définition de l'opérateur $\mathcal{A}_p^0$

Nous définissons l'opérateur $\mathcal{A}_p^0$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ par :

$$\mathcal{A}_p^0 u = -\sum_{i,k,l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\left(\sum_{r,s=1}^{N} a_{rs}^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_r}\frac{\partial u}{\partial x_s}\right)^{\frac{p-2}{2}} a_k^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]$$

où les a^i_{kl} sont des fonctions $L^\infty(\Omega)$ telles que :

$$a^i_{kl}(x) = a^i_{lk}(x), \qquad \text{pour } i,k,l = 1,\dots,N$$

de sorte que pour $i = 1,\dots,N$ la forme bilinéaire

$$a_i(\xi,\xi') = \sum_{k,l}^{N} a^i_{kl}(x)\xi_k.\xi'_l,\ \ \xi,\xi' \in \mathbf{R}$$

soit symétrique.

Il est clair que l'opérateur $\mathcal{A}^0_p$ est bien défini sur $W^{1,p}_0(\Omega)$ à valeurs dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Nous supposons dans toute la suite que pour tout $i = 1,\dots,N$

$$a_i(\xi,\xi) \geq |\xi_i|^2, \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}^N$$

où ξ_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de ξ.

Nous noterons pour tout $i = 1,\dots,N$, $a^i_{kl}(x) := a^i_{kl}$ et $a_i(\xi,\xi) := |\xi|^2_i$.

$|.|_i$ est une semi-norme sur $\mathbf{R}^N$ ainsi pour tout u et tout v dans $W^{-1,p'}(\Omega)$

$$\langle \mathcal{A}^0_p u, v\rangle = \sum_{i,k,l=1}^{N} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}_i a^i_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_l}\,dx$$

Quand $a^i_{kl} = \delta_{i,k,l}$ $\mathcal{A}^0_p = \Delta^0_p$, quand $a^i_{kl} = \frac{1}{N}\delta_{k,l}$ $\mathcal{A}^0_p = \Delta_p$, et quand $a^i_{kl} = \frac{1}{N}a_{kl}$ $\mathcal{A}^0_p = \mathcal{A}_p$, δ réfère au symbole de Kronecker.

Remarque 1. Nous pouvons facilement vérifier que

$$[\left(\langle \mathcal{A}^0_p u, v\rangle\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\nabla u|^p_i\,dx\right)^{1/p}]$$

est une norme équivalente à la norme $W^{1,p}_0(\Omega)$. Nous noterons cette norme par $||.||_{\mathcal{A}_p}$ et que $(W^{1,p}_0(\Omega), ||.||)$ est convexe uniformément.

2.2. Propriétés élémentaires de $\mathcal{A}_p^0$

i) L'opérateur $\mathcal{A}_p^0$ est un homéomorphisme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ sur $W^{-1,p'}(\Omega)$.

ii) $\mathcal{A}_p^0$ est strictement monotone dans le sens suivant :

Pour $u \neq v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\langle \mathcal{A}_p^0 u - \mathcal{A}_p^0 v, u - v\rangle$ est strictement positif.

iii) $\mathcal{A}_p^0$ est coercif dans le sens suivant :

$$\lim_{||u||_{\mathcal{A}_p} \to +\infty} \frac{\langle \mathcal{A}_p^0 u, u\rangle}{||u||_{\mathcal{A}_p}} = +\infty$$

La démonstration de ces résultats est une adaptation des méthodes utilisées pour le traitement des opérateurs variationnels (cf. [5]

iv) Considérons la fonctionnelle suivante : $\mathcal{A}_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbf{R}$ définie par

$$\mathcal{A}_p(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla u|_i^p \, dx$$

Alors $\mathcal{A}_p^0(u)$ n'est autre que la dérivée au sens de Fréchet de $\mathcal{A}_p$.

$$\mathcal{A}_p'(u) = \mathcal{A}_p^0(u)$$

donc $\mathcal{A}_p^0$ dérive d'un potentiel.

3. Existence d'une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini

Dans cette section nous montrons qu'il existe une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini par la méthode de Ljusternik-Schnirelman et en utilisant le théorème fondamental de multiplicité.

3.1. Préliminaires

Définissons la fonctionnelle Φ de la manière suivante :

$$\Phi(u) = [\mathcal{A}_p(u)]^2 - B(u)$$

où

$$B(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega m|u|^p\,dx$$

Il est clair que $\mathcal{A}_p$ et B sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Leurs dérivées respectives en un point $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sont

$$\mathcal{A}_p'(u) = \mathcal{A}_p^0(u)$$

et

$$B'(u) = m|u|^{p-2}u$$

et Φ est paire et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous supposons que

$$\text{mes }\left(\{x \in \Omega;\ m(x) > 0\}\right) \neq 0 \tag{3.1}$$

Et nous nous intéressons aux solutions faibles du problème (V.P.) défini par :

$$(V.P.)\quad \begin{cases} (\lambda, u) \in \mathbf{R}_+ \times W_0^{1,p}(\Omega) \\ \sum_{i,k,l=1}^N \int_\Omega |\nabla u|_0^{p-2} a_{kl}^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_l}\,dx = \lambda \int_\Omega m|u|^{p-2}uv\,dx \\ \text{pour tout } v \text{ appartenant à } W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

Definition 1. Nous dirons que λ est une valeur propre, s'il existe une fonction u non nulle de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que le couple (λ, u) soit une solution de (V. P.). u sera dite une fonction propre associée à la valeur propre λ.

3.2. Existence d'une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini

Sous l'hypothèse 3.1, nous montrons qu'il existe une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini.

La démonstration est analogue à celle donnée par Anane dans [1]. Nous transformons le problème aux valeurs propres et fonctions propres en un problème aux points critiques et valeurs critiques.

Nous vérifions facilement que si $u \neq 0$ est un point critique de ϕ et c est la valeur critique associée, alors $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{-c}}$ est une valeur propre et u est une fonction propre associée du problème (V.P.) et vice-versa.

Maintenant, montrons l'existence de ces points critiques. Pour cela posons

$$c_k = \inf_{K\in A_k} \max_{v\in K} \Phi(v) \tag{3.2}$$

où

$$A_k = \Big\{K \text{ compact symétrique de } W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\};\ \delta(K)\geq k\Big\} \quad k\geq 1$$

δ étant le genre de Krasnosel'skii.

Lemme 1. Pour $n \geq 1$, c_n défini par 2 est une valeur critique de Φ, de plus nous avons

$$-\infty < \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi = c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n < 0 = \Phi(0) = 0$$

Preuve.

La suite $(A_k)_{k\geq 1}$ est décroissante donc

$$-\infty \leq c_1 \leq c_2 \leq c_k \leq c_n$$

Φ est paire, de classe C^1. Pour démontrer ce lemme, nous allons appliquer le théorème fondamental de multiplicité. Il suffit donc que Φ vérifie les conditions suivantes :

1. Φ est minorée.
2. Φ vérifie la condition de Palais-Smale.
3. Pour tout $k \geq 1$, il existe un compact K symétrique de $W_0^{-1,p}(\Omega)$ tel que
$$\delta\,(K) = k \text{ et } \sup_{k} \Phi\,(v) < 0$$

Verification

1. Nous avons

$$\begin{aligned} pB(u) = \textstyle\int_\Omega m|u|^p\,dx &\leq ||m||_\infty \textstyle\int_\Omega |u|^p\,dx \\ &\leq c_1||m||_\infty \textstyle\int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla u|_i^p\,dx \\ &\leq c_2||m||_\infty \textstyle\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx \\ &\leq c_2||m||_\infty pA_p(u) \end{aligned}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes.

Ceci grâce à l'inégalité de Sobolev et le fait que la norme $||.||_{A_p}$ est équivalente à la norme $||.||_{1,p}$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} p\Phi\,(u) & = & (A_p(u))^2 - pB(v) \\ & \geq & p(A_p(u))^2 - c_3||m||_\infty A_p(u) \end{array}$$

d' où

$$(A_p(u)^2) - B(v) \geq A_p(u)\left[A_p(u) - \frac{1}{p}c_3||m||_\infty\right]$$

or A_p est coercive et minorée et il en est de même pour Φ, donc

$$\inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi(u) > -\infty$$

2. Condition (P. S.) Soit $(u_n)_n$ une suite dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $\Phi(u_n)$ est bornée et $\Phi\prime(u_n) \to 0$ dans $W^{-1,p\prime}(\Omega)$. $(u_n)_n$ est bornée car Φ est coercive (voir **1.**).

Donc, il existe une sous suite notée aussi $(u_n)_n$ qui converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Donc fortement dans $L^p(\Omega)$ et $||u_n||_{A_p}$ converge vers $\ell \geq 0$.

Si $\ell = 0$, i.e. $u_n \to 0$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, (P.S.) est satisfaite.

Si $\ell > 0$, il existe n_0 tel que $||u_n||_{A_p} \neq 0$ pour $n \geq n_0$.

$$\begin{array}{r} \Phi\prime(u_n) = 2A_p\prime(u)A_p(u) - B\prime(u_n) \\ A\prime(u_n) = \frac{p}{2}\frac{\Phi\prime(u_n)+m|u_n|^{p-1}-u_n}{||u||_{A_p}} \\ A_p^0(u_n) = \frac{p}{2}\frac{\Phi\prime(u_n)+m|u_n|^{p-2}-u_n}{||u||_{A_p}} \end{array}$$

d'où

$$u_n = (A_p^0)^{-1}\frac{\Phi\prime(u_n) + m|u_n|^{p-2} - u_n}{||u||_{A_p}}$$

or $\dfrac{p}{2}\dfrac{\Phi\prime(u_n) + m|u_n|^{p-2} - u_n}{||u||_{A_p}}$ converge fortement dans $W^{-1,p\prime}(\Omega)$. La réciproque $(A_p^0)^{-1}$ étant continue. Donc u_n converge fortement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

3. Soit n un entier tel que $n \geq 1$ et soient $u_1, \ldots, u_n$ n fonctions définies sur Ω telles que :

$$\mathrm{supp}(u_i) \cap \mathrm{supp}(u_j) = \emptyset$$

et

$$\int_\Omega m|u_i|^p\,dx > 0 \text{ pour tout } i \in \{1,\dots,n\}$$

u_i peut être obtenue par approximation dans $L^2(\Omega)$ de la fonction caractéristique de l'ensemble

$$B_i \cap \{x \in \Omega;\ m(x) > 0\}$$

où $(B_i)_{1\le i\le n}$ sont des boules de Ω disjointes deux à deux et telles que :

$$\operatorname{mes}(B_i \cap \{x \in \Omega;\ m(x) > 0\}) \neq 0$$

Nous normaliserons les fonctions u_i de sorte que $B(u_i) = 1$. Soit F_n le sous espace de $W_0^{1,p}(\Omega)$ engendré par les fonctions u_i.

Pour tout $v \in F_n$, $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$

$$B(v) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| B(u_i) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p$$

Ainsi l'application $v \mapsto (B(v))^{1/p}$ est une norme sur F_n.

Comme F_n est un espace de dimension finie et que toutes les normes sont équivalentes sur un espace de dimension finie, il existe c tel que

$$cA_p(v) \le B(v) \le \frac{1}{c}A_p(v) \text{ pour tout } v \in F_n$$

Soit le compact

$$K = \{v \in F_n;\ \frac{c^2}{4} \le B(v) \le \frac{c^2}{3}\}$$

Montrons que $\sup_{v\in K}\Phi(v) < 0$:

Soit $v \in K$, nous avons

$$\Phi(v) = (A_p(v))^2 - B(v) \le \frac{1}{c^2}(B(v))^2 - B(v)$$

Soit $f\colon \left[[\frac{c^2}{4}, \frac{c^2}{3}\right] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{t^2}{c^2} - t$$

donc

$$f\prime(t) = \frac{2t}{c^2} - 1$$

et par suite

$$f\prime(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{c^2}{2}$$

donc sur $\left[\frac{c^2}{4}, \frac{c^2}{3}\right]$ f est décroissante. Comme

$$f(t) \leq f\left(\frac{c^2}{4}\right) = -\frac{3c^2}{16}$$

Il s'en suit que pour tout $v \in K$

$$\Phi(v) \leq f(t) \leq -\frac{3c^2}{4} < 0$$

D'autre part, comme F_n est isomorphe à $\mathbf{R}^n$, nous identifions K à une couronne K' de $\mathbf{R}^n$ telle que $S^{n-1} \subset K' \subset \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ où S^{n-1} est la sphère unité de $\mathbf{R}^n$. Nous avons alors

$$\delta(K) = n$$

d'où le lemme. □

Lemme 2.

Nous avons $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ où c_n est défini par 2.

Preuve.

Nous montrons que pour tout ε il existe $n_\varepsilon \geq 1$ tel que pour tout $k \in A_{n_\varepsilon}$ avec $k \subset E$

$$\sup_{v\in k} \Phi(v) \geq -\varepsilon$$

où

$$E = \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega);\ \Phi(v) \leq 0\right\}$$

Nous aurons le résultat car Φ est coercive et E est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et en utilisant le fait que $I\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ est compacte, I est l'injection canonique.

Nous avons pour tout $\eta > 0$, il existe un espace F_η de $L^p(\Omega)$ de dimension finie et une application $I_\eta\colon E \to F_\eta$ continue et telle que

$$\sup_{v\in E} ||v - I_\eta(v)||_p \leq \eta$$

Posons
$$\tilde{I}_\eta(v) = \frac{1}{2}\left(I_\eta(v) - I_\eta(-v)\right)$$
Nous vérifions facilement que pour tout $v \in E$, $\tilde{I}_\eta : E \to F_\eta$ est bien définie (car E est symétrique) impaire continue et satisfait

$$\sup_{v\in E} ||v - I_\eta(v)||_p \leq \eta$$

Étant donné maintenant $\varepsilon > 0$ puisque E est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$, il résulte de cette dernière inégalité qu'il existe $n_\varepsilon > 0$ tel que:
$$|B(v) - B(\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
pour tout $v \in E$. Soit $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $B(v) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $||v - x||_p \leq \delta_\varepsilon$. Donc pour tout $v \in E$ avec

$$||\tilde{I}_\eta(v)||_p \leq \delta_\varepsilon$$

Nous avons

$$B(v) \leq ||B(v) - B(\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}(v))|_p + B(\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}(v)) < \varepsilon$$

Ce qui implique que pour tout compact symétrique k avec

$$k \subset E \cap \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega);\ B(v) \geq \varepsilon\right\}$$

Nous avons
$$\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}(k) \subset \{v \in F_{\eta_\varepsilon};\ ||v - ||_p \geq \delta_\varepsilon\}$$
puisque $\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}(k)$ est symétrique et compact dans $L^p(\Omega)$, il découle de cette dernière inclusion que

$$\delta^0(\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}(k)) \leq \dim(F_{\eta_\varepsilon})$$

où δ^0 est le genre dans $L^p(\Omega)$ d'une partie compacte symétrique $K\prime \subset L^p(\Omega)$. Finalement, puisque l'applications $\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}$ est impaire et continue, il résulte de la définition de δ et δ^0 que

$$\delta(k) \leq \delta^0(\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}(k)) \leq \dim(F_{\eta_\varepsilon})$$

où δ^0 est le genre dans $L^p(\Omega)$ d'une partie compacte symétrique $K\prime \subset L^p(\Omega)$. Finalement, puisque l'applications $\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}$ est impaire et continue, il résulte de la définition de δ et δ^0 que

$$\delta(k) \leq \delta^0(\tilde{I}_{\eta_\varepsilon}(k)) \leq \dim(F_{\eta_\varepsilon})$$

Donc pour tout compact symétrique $K \subset E$ tel que

$$\delta(k) \geq \dim(F_{\eta_\varepsilon}) + 1$$

Il existe $v_0 \in k$ tel que

$$\inf_{v \in k} B(v) \leq B(v_0) < \varepsilon$$

et par suite, puisque $\Phi(v) \geq -B(v)$ nous avons

$$\sup_{v \in k} \Phi(v) \geq \inf_{v \in k} B(v) > -\varepsilon$$

d'où le résultat.

Théorème 3.

Le problème (V. P.) admet une infinité de valeurs propres positives (λ_n) telle que

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$$

Preuve.

Nous avons $\lambda_n = \dfrac{1}{2\sqrt{-c_n}}$, d'après le lemme précédent nous avons le résultat. □

Remarque 2.

1. Si nous remplaçons m par $-m$ dans (V.P.) et que $-m$ satisfait

$$mes\,(\{x \in \Omega;\ -m(x) > 0\}) \neq 0$$

   le problème (V.P.) admet une suite $(\lambda_{-n})_n$ de valeurs propres négatives, avec $\lim_{n \to \infty} \lambda_{-n} = -\infty$.

2. Soit $(\lambda_n)_n$ la suite de valeurs propres donnée par le théorème précédent, c-à-d $\lambda_n = 1/2\sqrt{-c_n}$ où c_n est défini par (2).

   Nous avons [4].

$$\lambda_n = \inf_{k \in A_n} (\sup \{\mathcal{A}_p(v);\ v \in k \text{ et } B(v) = 1\})$$

   En particulier

$$\lambda_1 = \inf \left\{\mathcal{A}_p(v);\ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } B(v) = 1\right\}$$

   où λ_1 est la première valeur propre de (V.P.). Elle correspond à la valeur critique c_1. En effet, soit $\lambda \geq 0$ une valeur propre et soit u une fonction propre associée à λ telle que $B(u) = 1$. Donc u vérifie en particulier

$$\mathcal{A}_p(u) - \lambda B(u) = 0$$

   donc $\lambda = \mathcal{A}_p(u)$, or $\mathcal{A}_p(u) > 0$ car $u \neq 0$ donc $\lambda > 0$ (en particulier $\lambda_1 > 0$) donc $\lambda \geq \lambda_1$ par définition de λ_1.

4. Simplicité de la première valeur propre

Dans cette section, nous montrons que la première valeur propre λ_1 est simple et que toute fonction propre associée à λ_1 garde un signe constant.

Théorème 4.
On a :

i) λ_1 est une valeur propre du problème (V.P.).

ii) $u \not\equiv 0$ est une fonction propre associée à λ_1 si et seulement si :

$$\mathcal{A}_p(u) - \lambda_1 B(u) = 0 = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} (\mathcal{A}_p(v) - \lambda_1 B(v)$$

iii) Toute fonction propre associée à λ_1 garde un signe constant. (c-à-d $u > 0$ ou bien $u < 0$ dans Ω.)

Preuve.

L'assertion i) est déjà établie (Voir au dessus).

Pour ii), puisque $\mathcal{A}_p$ est f.s.c. et coercive, B est faiblement continue dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'infimum dans la définition de λ_1 est atteint par un élément $u \not\equiv 0$. En tenant compte de la p-homogéinité de $\mathcal{A}_p$ et B et de la définition de λ_1 nous avons :

$$\mathcal{A}_p(u) - \lambda_1 B(u) = 0 = \inf_{v\in\ W_0^{1,p}(\Omega)} \left(\mathcal{A}_p(v) - \lambda_1 B\left(v\right)\right)$$

donc

$$\mathcal{A}_p'(u) = \lambda_1 B'(u)$$

et par suite u est une fonction propre associée à λ_1.

iii) Soit u une fonction propre associée à λ_1. Nous avons par définition $u^+ \not\equiv 0$ ou $u^- \not\equiv 0$. Supposons $u^+ \not\equiv 0$[1]. Posons $v = u^+$ dans (V.P.), nous obtenons

$$\mathcal{A}_p(u^+) - \lambda_1 B(u^+) = 0$$

donc d'après (3) u^+ est une fonction propre, d'après le principe du maximum [3] $u^+ > 0$ sur Ω et par suite $u^+ = u$. □

Théorème 5.

Supposons que l'hypothèse de régularité.

(4.1) Toute solution du problème (VP) est de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$

est satisfaite, alors :

λ_1 est une valeur propre simple de $\mathcal{A}_p^0$.

c-à-d si u et v sont deux fonctions propres associées à λ_1 alors il existe un réel α tel que $u = \alpha v$

Preuve.

Soient u et v deux fonctions propres positives associées à λ_1. Nous avons $u >$ et $v > 0$ (Voir principe du maximum plus haut). De même $||u||_\infty < +\infty$ et $||v||_\infty < +\infty$ (Voir estimation L^∞ au chapitre 1). Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon \qquad v_\varepsilon = v + \varepsilon$$

$$\eta(u, v) = \frac{(u+\varepsilon)^p - (v+\varepsilon)^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}}$$

$$\eta(v,u) = \frac{(v+\varepsilon)^p - (u+\varepsilon)^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}}$$

Lemme 6.
La fonction $\eta(u,v)$ est à valeurs dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Preuve.
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites dans C_0^∞ telles que :

$$u_n \to u \text{ et } v_n \to v \text{ pour la norme de } W_0^{1,p}(\Omega)$$

et

$$\forall n \quad 0 \leq u_n, v_n \leq M < +\infty$$

donc

$$\eta_n = \frac{(u_n+\varepsilon)^p - (v_n+\varepsilon)^p}{(u_n+\varepsilon)^{p-1}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

La suite $(||\eta_n||_{1,p})_n$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc une sous suite notée aussi $(\eta_n)_n$ converge faiblement vers ω dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc fortement dans $L^p(\Omega)$ et presque partout vers ω dans Ω. D'autre part $(\eta_n)_n$ converge presque partout vers η dans Ω, donc $\omega = \eta$ et par suite $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Suite de la preuve du théorème :

Les couples (λ_1, u) et (λ_1, v) sont solutions du problème (V.P.), donc en particulier ils vérifient :

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla u|_i^{p-2} a_i(\nabla u, \nabla\eta(u,v))\,dx = \lambda_1 \int_\Omega m(x) u^{p-1}\eta(u,v)\,dx$$

et

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla v|_i^{p-2} a_i(\nabla v, \nabla\eta(v,u))\,dx = \lambda_1 \int_\Omega m(x) v^{p-1}\eta(v,u)\,dx$$

Nous avons

$$\eta(u,v) = \frac{u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p}{u_{\varepsilon-1}^p} = u_\varepsilon - \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} v_\varepsilon$$

donc

$$\nabla\eta(u,v) = \left\{1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right\}\nabla u_\varepsilon - p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1}\nabla v_\varepsilon$$

De même

$$\nabla\eta(v,u) = \left\{1 + (p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right\}\nabla v_\varepsilon - p\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1}\nabla u_\varepsilon$$

Nous avons

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla u \qquad \text{et} \qquad \nabla v_\varepsilon = \nabla v$$

d'où

$\int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla u|_i^{p-2} a_i(\nabla u, \left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right]\nabla u_\varepsilon + a_i\left[\nabla u, p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-2}\nabla v_\varepsilon\right]\,dx$
$= \int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla u|_i^{p-2}\left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p a_i(\nabla u, \nabla u) - p\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-2} a_i(\nabla u, \nabla v)\right]\,dx$
$= \int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla u|_i^{p-2}\left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p - p\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-2}|\nabla u|_i^{p-2} a_i(\nabla u, \nabla v)\right]\,dx$
$= \lambda_1 \int_\Omega m u^{p-1}\eta(u,v)\,dx$ car pour $i = 1, \ldots, N$, $a_i(\nabla u, \nabla u) = |\nabla u|_i^2$.

Donc

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla u|_i^{p-2}\left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p - p\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-2}|\nabla u|_i^{p-2} a_i(\nabla u, \nabla v)\right]\,dx$$
$$= \lambda_1 \int_\Omega m u^{p-1}\eta(u,v)\,dx$$

De même, nous avons

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla v|_i^{p-2}\left[1 + (p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p - p\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-2}|\nabla v|_i^{p-2} a_i(\nabla v, \nabla u)\right]\,dx$$
$$= \lambda_1 \int_\Omega m v^{p-1}\eta(v,u)\,dx$$

Et par suite en faisant la somme de ces deux dernières équations, nous obtenons

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\left\{1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right\}|\nabla u|_i^{p-2} + 1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p |\nabla u|_i^p\right)\,dx$$
$$- \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1}|\nabla u|_i^{p-2}(\nabla u, \nabla v) + p\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)\right]\,dx$$
$$= \lambda_1 \int_\Omega m\left[\left(\frac{u}{u+\varepsilon}\right)^{p-1}\right] - \left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1}$$

Posons

$$I_\varepsilon = \int_\Omega m \left[\left(\frac{u}{u+\varepsilon}\right)^{p-1}\right] - \left(\frac{v}{v+\varepsilon}\right)^{p-1} .(u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p$$

Nous avons

$$\nabla \log u_\varepsilon = \frac{1}{u_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon = \frac{1}{u_\varepsilon}\nabla u$$

$\lambda_1 I_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^N \int_\Omega u_\varepsilon^p \Big[|\nabla \log u_\varepsilon|_i^p - |\nabla \log v_\varepsilon|_i^p - p|\nabla \log v_\varepsilon|_i^{p-2}$

a$_i(\nabla \log u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon - \nabla \log v_\varepsilon\Big]\, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega v_\varepsilon^p \Big[|\nabla \log v_\varepsilon|_i^p - |\nabla \log u_\varepsilon|_i^p -$ $p|\nabla \log u_\varepsilon|_i^{p-2} a_i(\nabla \log v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon - \nabla \log u_\varepsilon\Big]\, dx$
pour la suite de la démonstration, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 7.

Pour tout $\xi_1, \xi_2 \in^N$ et pour presque tout $x \in \Omega$, nous avons :
Si $p \geq 2$

$$|\xi_2|_i^p \geq |\xi_1|_i^p + p|\xi_1|_i^{p-2} a_i(\xi_1, (\xi_2 - \xi_1)) + \frac{C(p)|\xi_2 - \xi_1|_i^2}{\left(2^{p-1} - 1\right)^{2-p}}$$

et si $1 < p < 2$

$$|\xi_2|_i^p \geq |\xi_1|_i^p + p|\xi_1|_i^{p-2} a_i(\xi_1, (\xi_2 - \xi_1)) + \frac{C(p)|\xi_2 - \xi_1|_i^2}{\left(|\xi_1|_i - |\xi_2|_i\right)^{2-p}}$$

où $C(p) > 0$ ne dépend pas de $\xi_1, \xi_2, x \in \Omega$ et N.

Proof. [Preuve du lemme] Pour la démonstration de ce lemme, voir [5]. □ Suite de la démonstration du théorème
D'après le lemme précédent, nous avons pour $p \geq 2$

$$\lambda_1 I_\varepsilon(m) \geq C(p) \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{(u_\varepsilon^p + v_\varepsilon^p)}{(2^{p-1} - 1)} .|\nabla \log u_\varepsilon - \nabla \log v_\varepsilon|_i^p \, dx \tag{4.2}$$

et pour tout $1 < p < 2$

$$\lambda_1 I_\varepsilon(m) \geq C(p) \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{(u_\varepsilon^p + v_\varepsilon^p)|\nabla \log u_\varepsilon - \nabla \log v_\varepsilon|_i}{\left(|\nabla \log u_\varepsilon - \nabla \log v_\varepsilon|_i\right)^{p-2}} \, dx \tag{4.3}$$

Puisque

$$\nabla \log u_\varepsilon = \frac{1}{u_\epsilon}\nabla u \qquad \text{et} \qquad \nabla \log v_\varepsilon = \frac{1}{v_\epsilon}\nabla v$$

Alors pour $p \geq 2$, nous avons

$$\lambda_1 I_\varepsilon(m) \geq \frac{C(p)}{\left(2^{p-1}-1\right)} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left[\frac{1}{(u+1)^p} + \frac{1}{(v+1)^p}\right] .|u_\varepsilon \nabla v - v_\varepsilon \nabla u|\, dx \geq 0$$

(4.4)

et pour $1 < p < 2$ nous avons

$$(4.5)\ \lambda_1 I_\varepsilon(m) \geq C(p) \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{(u_\varepsilon.v_\varepsilon)(u_\varepsilon^p + v_\varepsilon^p)|v_\varepsilon \nabla u - u_\varepsilon \nabla v|_i^2}{(v_\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|_i + u_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon|_i + 1)^{2-p}}\, dx \geq 0$$

Comme les suites (u_ε) et (v_ε) convergent uniformément vers u et v quand $\varepsilon \to 0$ et par application du lemme de Fatou nous obtenons :
Pour $p \geq 2$

$$\lambda_1 \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon \geq \frac{1}{2^{p-1}-1} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left[\frac{1}{(u+1)^p} + \frac{1}{(v+1)^p}\right].$$

$$(4.6) \qquad |u\nabla v - v\nabla u|_i^p \geq 0$$

et pour $1 < p < 2$

$$(4.7) \quad \lambda_1 \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon \geq C(p) \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{u.v(u^p + v^p)|u\nabla v - v\nabla u|_i^2}{(v|\nabla u|_i + u|\nabla v|_i + 1)^{2-p}}\, dx \geq 0$$

Montrons que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(m) = 0$$

Nous avons

$$I_\varepsilon(m) = \int_\Omega m u^{p-1} u_\varepsilon\, dx + \int_\Omega m v^{p-1} v_\varepsilon\, dx - \int_\Omega m\left(\frac{v}{v_\varepsilon}.u_\varepsilon\right)^{p-1} u_\varepsilon\, dx -$$

$\int_\Omega m\left(\frac{u}{u_\varepsilon}.v_\varepsilon\right)^{p-1} v_\varepsilon\, dx Puisque$ m$\in L^\infty(\Omega)$, grâce au théorème de la convergence dominée nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(m) = 0$$

et d'après (4.6) et (4.7) nous avons

$$\sum_{i=1}^{N} |v\nabla u - u\nabla v|_i = 0,$$

et puisque $\dfrac{u}{v} \in L^\infty$ (d'après le principe du maximum), nous avons $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = 0$, donc il existe $k > 0$ tel que

$$u = kv$$

d'où le résultat. □

5. Isolation de la première valeur propre

Nous montrerons d'abord que toute fonction propre associée à une valeur propre positive autre que la première valeur propre change de signe. Ensuite, nous montrerons que λ_1 est isolée.

Théorème 8. Si v est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda > 0$ telle que $\lambda \neq \lambda_1$ alors v change de signe, c-à-d $v^+ \not\equiv 0$ et $v^- \not\equiv 0$ dans Ω, de plus nous avons

$$\min\Big\{ mes\,(\Omega^+), mes\,(\Omega^-)\Big\} \geq (\lambda||m||_\infty C^p)^\sigma \tag{5.1}$$

où

$$\Omega^+ = \Big\{x \in \Omega;\ v(x) > 0\Big\} \qquad \Omega^- = \Big\{x \in \Omega;\ v(x) < 0\Big\}$$

et C est une constante indépendante de v et de λ, et $\sigma = -N/p$ si $p < N$ et $\sigma = -2$ si $p \geq N$.

Proof. [Preuve] Soit u une fonction propre associée à λ_1 telle que

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\nabla u|_i^p = 1$$

Supposons qu'il existe une valeur propre $\lambda > 0$ telle que $\lambda \neq \lambda_1$ ayant une fonction propre $v \geq 0$ vérifiant

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\nabla v|_i^p = 1$$

En particulier nous avons

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\nabla u|_i a_i(\nabla u, \nabla \eta(u,v))\, dx = \lambda_1 \int_\Omega m u^{p-1} \eta(u,v)\, dx \tag{5.2}$$

et

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\nabla v|_i a_i(\nabla v, \nabla \eta(v,u))\, dx = \lambda_1 \int_\Omega m v^{p-1} \eta(v,u)\, dx \tag{5.3}$$

avec

$$\eta(u,v) = \frac{(u+\varepsilon)^p - (v+\varepsilon)^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}} \text{ et } \eta(v,u) = \frac{(v+\varepsilon)^p - (u+\varepsilon)^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}}$$

La somme de (5.2) et de (5.3) nous donne

$$J_\varepsilon = \int_\Omega m \left[\lambda_1 \left(\frac{u}{u_\varepsilon} \right)^{p-1} - \lambda \left(\frac{v}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} \right] (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)\, dx \geq 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(m) = (\lambda_1 - \lambda) \int_\omega m(u^p - v^p)\, dx \geq 0$$

Il s'en suit que :

$$(\lambda_1 - \lambda) \left(\frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\nabla u|_i^p\, dx - \frac{1}{\lambda} \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\nabla v|_i^p\, dx \right) \geq 0$$

donc

$$(\lambda_1 - \lambda) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda} \right) \geq 0$$

donc $\lambda = \lambda_1$, ce qui est absurde. Donc v change de signe.

Montrons maintenant l'estimation (5.1). pour cela nous remplaçons dans (V.P.), v par v^+, puis par v^-. L'inégalité de Hölder nous donne

$$||v^+||_p = \lambda \int_\Omega m |v^+|^p\, dx \leq \lambda ||v^+||_{p^*}^p ((\Omega^+))^{1-p/p^*}$$

Puis par l'inégalité de Sobolev

$$||v^+||_{1,p^*} \leq ||\nabla v^+||_{1,p}$$

et en utilisant le fait que $(\Omega^+) \neq 0$ car $v^+ \not\equiv 0$, nous obtenons

$$mes(\Omega^+) \geq (\lambda ||m||_\infty C^p)^\sigma$$

De même pour v^-. Ce qui nous donne l'estimation (5.1). □

Théorème 9. La valeur propre λ_1 est isolée, c-à-d λ_1 est l'unique valeur propre du problème (V.P.) dans un certain intervalle $[0, a]$ où $a > \lambda_1$.

Proof. [Preuve] Soit (λ, u) une solution du problème (VP). Il est clair que si $\lambda = 0$, λ n'est pas une valeur propre.

Par définition de λ_1, nous avons

$$\|v\|^p_{\mathcal{A}_p} \geq \lambda_1 \int_\Omega m|v|^p \, dx$$

D'autre part, nous avons

$$\|v\|^p_{\mathcal{A}_p} = \lambda \int_\Omega m|v|^p \, dx$$

d'où

$$\lambda_1 \leq \lambda$$

donc λ_1 est isolée à gauche.

Supposons maintenant qu'il existe une suite $(\lambda_n)_n$, $(\lambda_n \neq \lambda_1)$ de valeurs propres qui converge vers λ_1.

Soit u_n la fonction propre associée à λ_n telle que $||u_n||_{1,p} = 1$ pour tout n. Pour une sous suite encore notée $(u_n)_n$, $(u_n)_n$ converge faiblement dans Ω vers une fonction $u \in W_0^{1,p}$.

Comme:

$$u_n = \left(\mathcal{A}_p^0\right)^{-1} (\lambda_n m(x)|u_n|^{p-2}u_n)$$

et puisque $(\lambda_n m(x)|u_n|^{p-2}u_n)$ converge fortement dans $L^{p'}(\Omega)$ donc dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $\left(\mathcal{A}_p^0\right)^{-1} : W^{-1,p'} \to W_0^{1,p}$ est continue.

Donc $(u_n)_n$ converge fortement dans $W_0^{1,p}$ vers u avec u une fonction propre de norme 1 associée à λ_1, puisque u garde un signe constant (Voir §précédent.), supposons $u > 0$ par exemple.

Soit $\varepsilon > 0$ u étant strictement positive, donc il existe un réel $\eta_\varepsilon > 0$ et un ensemble $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ avec $mes(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $u(x) \geq 2\eta_\varepsilon$

pour tout $x \in \Omega_\varepsilon$. et comme $(u_n)_n$ converge presque partout dans Ω vers u, par le théorème d'Egorov, nous avons la suite $(u_n)_n$ qui converge fortement vers u uniformément à l'extérieur d'un ensemble de mesure arbitrairement petite, donc il existe un entier N_ε et un ensemble mesurable $\Omega'_\varepsilon \subset \Omega$ avec

$$mes(\Omega \setminus \Omega'_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

tels que $|u_n(x) - u(x)| \leq \eta_\varepsilon$

Pour tout $x \in \Omega'_\varepsilon$ et $\eta \geq N_\varepsilon$ nous avons

$$u_n(x) \geq \eta_\varepsilon > 0$$

pour tout $x \in \Omega_\varepsilon \cap \Omega'_\varepsilon$ et $n \geq N_\varepsilon$, en particulier pour tout $n \geq N_\varepsilon$, nous avons

$$mes\left(\left\{x \in \Omega;\ u_n(x) > 0\right\}\right) \geq mes(\Omega_\varepsilon \cap \Omega'_\varepsilon) \geq mes(\Omega) - \varepsilon$$

or d'après l'estimation (5.1)

$$mes\left(\left\{x \in \Omega;\ u_n(x) > 0\right\}\right) \geq (||m||_\infty C^p \sup(\lambda_n))^\sigma$$

Si nous prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^p ||m||_\infty\right)^\sigma$ nous aboutissons à une contradiction. $\square$

References

[1] A. Anane Étude des valeurs propres et de la croissance pour l'opérateur p-Laplacien, Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1987.

[2] H. Brezis et F. Browder, Sur une propriété des espaces de Sobolev, C.R.A.S. Paris, 287, 113–115, 1998.

[3] A. Benazzi, Thèse d'état, Université Mohamed I, Oujda, en préparation.

[4] O. Chakrone, Spectre d'ordre supérieur dans des problèmes aux limites quasilinéaires, et sur un théorème de points critique et application à un problème de non-résonance entre deux valeurs propres du p-Laplacien, Thèse d'état, Université Mohamed I, Oujda, 1998.

[5] P. Lindqvist, On the equation div $(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda u^{p-2}u = 0$ Prog. A.M.S., 1, 109, 1960

Received : March, 2000.

A. Anane
and
O. Chakrone
Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Mohamed I
Oujda - Maroc
e-mail : anane@sciences.univ-oujda.ac.ma

A. Benazzi
Département génie électrique
École supérieure de technologie
Oujda - Maroc
e-mail : benazzi@est.univ-oujda.ac.ma