

## **Análisis del Desempeño de un Ciclo tipo Carnot vía Relaciones de Semisuma de Diferentes Expresiones de su Eficiencia**

**Delfino Ladino-Luna<sup>(1)</sup>, Ricardo T. Páez-Hernández<sup>(1)</sup> y Pedro Portillo-Díaz<sup>(2)</sup>**

Universidad Autónoma Metropolitana-Atzacapatzalco, (1) Área de Física de Procesos Irreversibles, (2) Dpto. de Ciencias Básicas, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa, 02200, Atzacapatzalco, D. F., México (e-mail: dll@correo.azc.uam.mx, phrt@correo.azc.uam.mx, pportillodaz@gmail.com)

*Recibido Dic. 7, 2015; Aceptado Feb. 10, 2016; Versión final Abr. 5, 2016, Publicado Oct. 2016*

---

### **Resumen**

En el presente trabajo se discuten diferentes expresiones para la eficiencia de un sistema termodinámico, modelado como un ciclo de Carnot modificado (máquina térmica + alrededores). Dichas expresiones se utilizan para construir semisumas de ellas, comparando sus valores numéricos con los valores experimentales reportados en la literatura, para diversas plantas convertidoras de energía modeladas como el ciclo de Carnot modificado. Las expresiones de la eficiencia han sido obtenidas suponiendo que los flujos de calor en el sistema se realizan como indican la ley de enfriamiento de Newton y la ley de transferencia de calor de Dulong y Petit. El análisis se hace para el régimen a potencia máxima y función ecológica máxima, de manera que las semisumas obtenidas se puedan interpretar como la forma de operación de las máquinas térmicas. Se comparan gráficamente estas eficiencias y las semisumas obtenidas, y se muestran las expresiones analíticas de dichas semisumas.

*Palabras clave: termodinámica de tiempos finitos; eficiencia; potencia de salida; función ecológica; flujo de calor*

## **Performance Analysis of a Carnot-Type Cycle via Semi-sum Relations of its Efficiency Different Expressions**

### **Abstract**

In this work different expressions for the efficiency of a thermodynamic system, modeled as a modified Carnot cycle (heat engine + surroundings) are discussed. Such expressions are used to build semi-sums of them, comparing their numerical values with experimental values reported in the literature from various converter power plants modeled as the modified Carnot cycle. The expressions of the efficiency have been obtained assuming that the heat flows in the system are performed as indicated in the Newton cooling law and the Dulong and Petit heat transfer law. The analysis is made for the maximum power output regime and for the maximum ecological function regime, so the obtained semi-sums can be interpreted as the manner of operation of thermal engines. These efficiencies and the obtained semi-sums are graphically compared, and analytical expressions of such semi-sums are presented.

*Keywords: finite time thermodynamics; efficiency; power output; ecological function; heat flow*

## INTRODUCCIÓN

Actualmente se ha aceptado como una alternativa para el análisis de ciclos termodinámicos la llamada termodinámica de tiempos finitos, que inició su desarrollo con los trabajos pioneros de Novikov (1957) y Chambadal (1957), y su formulación teórica con el trabajo de Curzon y Ahlborn (1975), en los que se obtuvo una expresión para la eficiencia de diversas plantas de potencia, que constituye una cota de operación para máquinas térmicas más acorde con los resultados experimentales, conocida como eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov-Chambadal,  $\eta_{CAN}$ , a saber,

$$\eta_{CAN} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad (1)$$

donde  $T_2$  y  $T_1$  son las temperaturas de los almacenes de calor frío y caliente, respectivamente. En el marco de esta teoría, desde los primeros trabajos publicados posteriores a Curzon y Ahlborn (1975), y aún en los más recientes, usualmente se busca una función objetivo y la eficiencia de un ciclo obtenida a partir de dicha función, que dependa de algún parámetro controlable (ver, por ejemplo, Gutkowics-Krusin y col., 1978; Rubin, 1979; Salamon, 1980; Torres, 1988; Rebham, 2002; Kaushik y Tyagi, 2002; Ust, 2009; Ladino-Luna y Páez-hernández, 2010; Feid, 2010; Huleihil y Andresen, 2010; Xia y col., 2011;; Pescetti, 2014). De esta manera, se ha maximizado la potencia de salida; se ha minimizado la producción de entropía ó se ha maximizado una potencia efectiva, llamada función ecológica,  $E$ , (Angulo-Brown, 1991a), para un ciclo de Carnot modificado como el de la Figura 1. Particularmente, maximizando la función ecológica se obtiene la eficiencia ecológica  $\eta_E$ ,

$$\eta_E = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\tau^2 + \tau)}, \quad (2)$$

para el caso para el caso de flujos de calor como la ley de enfriamiento de Newton, en el sistema termodinámico formado por la máquina propiamente y sus almacenes de calor. Se encontró además una relación de semisuma,  $\eta_{SE}$ , para la eficiencia obtenida, a saber,

$$\eta_E \approx \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{CAN}) \equiv \eta_{SE}, \quad (3)$$

en donde  $\eta_C$  es la eficiencia del conocido ciclo de Carnot,  $\eta_{CAN}$  es la eficiencia obtenida por Novikov (1957), Chambadal (1957), y Curzon y Ahlborn, (1975) del ciclo de la Figura 1, ecuación (1), y  $\tau$  es la razón de las temperaturas de los almacenes de calor,  $\tau = T_2/T_1$ , de manera que  $T_2 < T_1$ . El ciclo de Carnot modificado se considera internamente reversible. La eficiencia ecológica, ecuación (2) se encuentra maximizando La función potencia efectiva, o función ecológica, que se define como (Angulo-Brown, 1991a),

$$E = P - T_2\sigma, \quad (4)$$

que como se observa es la relación entre la máxima potencia posible del ciclo,  $P = W_{TOT} / t$ , y la máxima producción de entropía posible  $\sigma = \Delta S / t$ , donde  $W_{TOT}$  es el trabajo total realizado por la máquina térmica modelada como el ciclo de Curzon y Ahlborn,  $\Delta S$  es el cambio de entropía durante los procesos de intercambio de calor entre la máquina y sus almacenes de calor, y  $t$  es el tiempo total del ciclo.

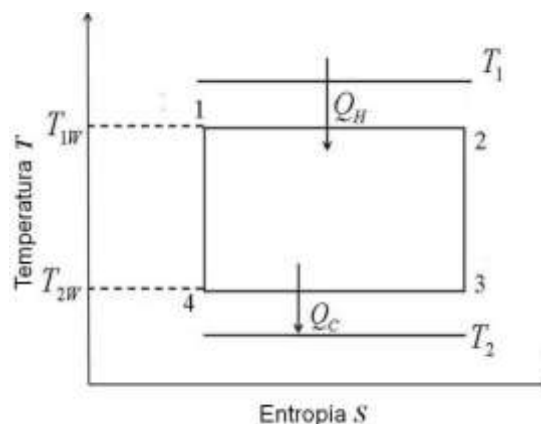


Fig. 1. Ciclo de Carnot modificado (ciclo de Curzon y Ahlborn). Los calores intercambiados son  $Q_H$  y  $Q_C$ .

Posteriormente, utilizando métodos numéricos y suponiendo una ley de transferencia de calor tipo Dulong y Petit para el ciclo antes mencionado, se encontró que también se obtiene una relación de semisuma para la eficiencia ecológica del mismo ciclo, de manera semejante al caso de ley de enfriamiento de Newton (Angulo-Brown y Páez-Hernández, 1993). Además se han hallado expresiones analíticas aproximadas para la eficiencia a potencia máxima y a función ecológica máxima con la misma ley de transferencia de Dulong y Petit. La pertinencia de la expresión (3) se muestra en la Tabla 1, en donde se comparan las eficiencias  $\eta_C$ ,  $\eta_{CAN}$ ,  $\eta_E$  y la eficiencia medida experimentalmente,  $\eta_{OBS}$ , para varias plantas de potencia, convencionales y modernas (nucleoeléctricas), suponiendo una ley de transferencia de calor como la ley de enfriamiento de Newton, en donde se observa que  $\eta_{CAN}$  se acerca más a  $\eta_{OBS}$  en las plantas convencionales, y  $\eta_E$  se acerca más a  $\eta_{OBS}$  en las plantas modernas.

Se ha encontrado que la propiedad expresada en (3) es una propiedad general para plantas convertidoras de energía, modeladas como el ciclo de Curzon y Ahlborn de la Figura 1. Sin embargo en la literatura de Termodinámica de Tiempos Finitos prácticamente nadie (salvo Angulo-Brown, 1991; Angulo-Brown y Páez-Hernández, 1993; Árias-Hernández y Angulo-Brown, 1994; Arias-Hernández y col., 2003; Ladino-Luna D., 2003, 2008), ha mostrado interés sobre una generalización de esta propiedad, como se puede colegir de los trabajos previamente citados y otros más, por ejemplo Chen y col. (2009), Li y col. (2008), Sánchez-Salas y col. (2011). Así, con el propósito de encontrar expresiones analíticas para la eficiencia de las centrales térmicas como las reportadas en la Tabla 1, y modeladas como el ciclo de Carnot modificado (ciclo de Curzon y Ahlborn), en el presente trabajo se proponen expresiones en semisuma a partir de diversos resultados conocidos, con el propósito de tener expresiones que lleven a valores numéricos lo más cercano posible a los valores experimentales reportados en la literatura. Algunas de estas expresiones utilizadas son aproximadas, pero en efecto proporcionan valores de eficiencia cercanos a los valores experimentales medidos para plantas convertidoras de energía, convencionales (anteriores a 1980) y modernas (nucleoeléctricas posteriores a 1980). Se incluyen tablas de valores para las expresiones obtenidas, con el propósito de hacer una comparación numérica con valores de las eficiencias ya conocidos. El objetivo central del trabajo es mostrar que puede modelarse el desempeño de una máquina térmica con ayuda del ciclo de Carnot modificado, y que dicho desempeño se puede estudiar a través de la expresión de su eficiencia en forma de semisumas de eficiencias obtenidas para casos particulares de funcionamiento, de manera que una combinación de estas particularidades nos muestre como realmente funciona la máquina térmica en cuestión. Con el fin de hacer auto-contenido el presente trabajo, se incluyen algunos resultados conocidos de la literatura de termodinámica de tiempos finitos. Eficiencias comparadas en la Tabla 1: eficiencia de Carnot,  $\eta_C$ ; eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov-Chambadal,  $\eta_{CAN}$ ; eficiencia ecológica,  $\eta_E$ ; eficiencia observada,  $\eta_{OBS}$ .

Tabla 1. Comparación de valores de la eficiencia para el ciclo de la Figura 1 (ver Curzon y Ahlborn, 1975; Angulo-Brown, 1991a,b). La temperatura  $T$  está en escala Kelvin.

Planta	$T_2/T_1$	$\eta_C$	$\eta_{CAN}$	$\eta_E$	$\eta_{OBS}$
Planta convencional de vapor por carbón quemado, West Turrock (Reino Unido), 1962	298/838	0.64439	0.40367	0.50905	0.360
Planta geotérmica de vapor, Lardarello (Italia), 1964	353/523	0.32505	0.17845	0.24818	0.160
Planta central de potencia vapor (Reino Unido), 1936-1940	298/698	0.57307	0.3466	0.44809	0.280
Planta de potencia de vapor (Estados Unidos de América), 1956	298/923	0.67714	0.43179	0.55447	0.400
Planta de ciclo combinado, vapor y mercurio (Estados Unidos de América), 1949	298/783	0.61941	0.38308	0.48744	0.340
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985	283/566	0.50000	0.29289	0.38763	0.350
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Almaraz II (España), 1983	290/600	0.51667	0.30478	0.40127	0.345
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Sizewell B (Reino Unido), 1995	288/581	0.50430	0.29594	0.39114	0.363
Planta nuclear, Cofrentes (España), 1984	289/562	0.48577	0.28290	0.37603	0.340
Planta nuclear, reactor avanzado enfriado con gas, Heysham (Reino Unido), 1988	288/727	0.60385	0.37060	0.47413	0.400

## RÉGIMEN DE MAXIMA POTENCIA DE SALIDA

En la termodinámica de tiempos finitos se buscan procedimientos para elaborar modelos de procesos termodinámicos, que conduzcan a cotas de operación, de las máquinas térmicas más realistas que las que proporciona la termodinámica clásica de equilibrio. Este objetivo puede ser alcanzado tomando en cuenta las fuentes productoras de irreversibilidad, así como a través de expresiones de la eficiencia que combinen diferentes modos de operación de dichas máquinas térmicas, a partir de su definición como la razón entre trabajo total realizado por la máquina,  $W_{TOT}$ , y calor absorbido por la máquina,  $Q_{abs}$ , a saber,

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{abs}}. \quad (5)$$

A partir de la publicación del trabajo pionero de Curzon y Ahlborn, diversos autores estudiaron varios aspectos del ciclo de Carnot modificado de la Figura 1, tomando en cuenta aspectos no analizados por dicho trabajo. Particularmente Rebham (2002) propuso un modelo de máquina térmica que incluye un émbolo móvil dentro de un cilindro, en contacto térmico con una fuente de calor y un disipador de calor, encontrando que la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov-Chambadal,  $\eta_{CAN}$ , corresponde al caso en el que la única pérdida de trabajo útil es por la expulsión de calor; y que la eficiencia a máxima potencia de salida tiene un valor entre la eficiencia considerando solo efectos de fricción y la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov-Chambadal, esto es,

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) < \eta_{Pm\acute{a}x} < 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad (6)$$

en donde podemos reconocer la eficiencia de Carnot,  $\eta_C = 1 - T_2/T_1$ . En la Tabla 1 se observa lo adecuado de esta afirmación, en el caso de las plantas convencionales. Para las plantas modernas (nucleo-eléctricas y otras), es necesario buscar la manera adecuada de expresar una relación semejante a (6). Así, una comparación de los valores numéricos para las eficiencias en (6), mostrados en la Tabla 1, permite hacer un primer ensayo de una expresión en semisuma que incluya las eficiencias  $\eta_C$  y  $\eta_{CAN}$ , de manera que la expresión resultante proporcione valores más cercanos a los valores de  $\eta_{OBS}$ . Sea  $\eta_{Pm\acute{a}x}^*$  una eficiencia intermedia, de manera que se puede escribir,

$$\eta_{Pm\acute{a}x}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\eta_C + \eta_{CAN}\right), \quad (7)$$

cuyos valores numéricos, para los mismos valores de temperaturas de las plantas de potencia de la Tabla 1, son muy cercanos a los valores experimentales observados, en el caso de plantas convencionales. La Figura 2 muestra como se cumple la afirmación anterior, en donde las diadas correspondientes a los datos experimentales han sido marcadas con cruces, muy cercanos a la curva correspondiente a la expresión (7).

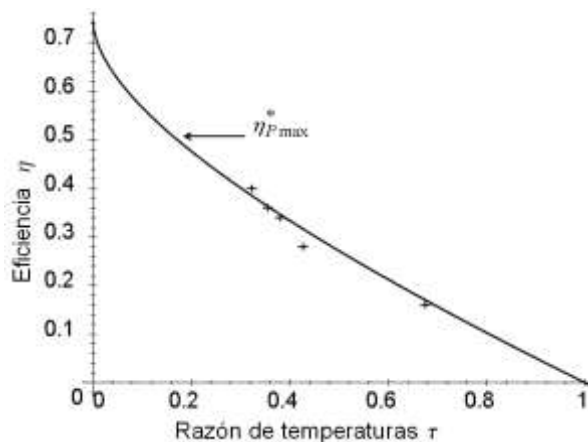


Fig. 2. Comparación entre valores experimentales de la eficiencia y valores obtenidos con (7).

Considérese ahora una ley de transferencia de calor como,

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T_0 - T)^k, \quad (8)$$

que contiene como caso particular la ley de transferencia de calor de Dulong y Petit, donde  $dQ/dt$  es la razón de transferencia de calor,  $\alpha$  es la conductancia térmica,  $T_0$  es la temperatura de los alrededores,  $T$  es la temperatura del cuerpo y  $k$  es un parámetro que cumple,  $k > 1$ . En el caso de la ley de transferencia de calor de Dulong y Petit se tiene  $1.1 \leq k \leq 1.6$  (Taylor, 1959; Nelson y Parker, 1977). Para plantas convencionales se obtienen valores de la eficiencia más cercanos a los valores experimentales, con esta ley de transferencia, que los que se obtienen con la ley de enfriamiento de Newton, en el régimen de máxima potencia de salida (Angulo-Brown y Páez-Hernández, 1993; Árias-Hernández y Angulo-Brown, 1994). Más recientemente, en el régimen de máxima potencia se han hallado expresiones analíticas aproximadas para la eficiencia, asumiendo el valor  $k = 5/4$  Ladino-Luna (2003)  $\eta_{OPDP}$ , siguiendo el procedimiento de Ladino-Luna (2000),

$$\eta_{OPDP} = 1 - \frac{1 - \tau + \sqrt{\tau^2 + 98\tau + 1}}{10}, \quad (9)$$

y utilizando un enfoque variacional (Arias-Hernández y col., 2004),  $\eta^{(\alpha)}_{MP}$ , también asumiendo  $k = 5/4$ ,

$$\eta^{(\alpha)}_{MP} = 1 + \frac{\tau}{8} - \frac{1}{8} \sqrt{\tau(80 + \tau)}. \quad (10)$$

Obsérvese que el régimen a potencia máxima es más adecuado para analizar el desempeño de las plantas convencionales, como se aprecia en los resultados mostrados en la tabla 1. Además, se encuentra que las expresiones (9) y (10) cumplen,

$$\eta_{OPDP} \leq \eta_{OBS} \leq \eta^{(\alpha)}_{MP}, \quad (11)$$

y la semisuma de  $\eta_{OPDP}$  y  $\eta^{(\alpha)}_{MP}$  resulta muy cercana a los valores experimentales. Sea  $\eta_{SDP}$  dicha semisuma, puede escribirse que,

$$\eta_{SDP} \equiv \frac{1}{2}(\eta_{OPDP} + \eta^{(\alpha)}_{MP}) \approx \eta_{OBS}. \quad (12)$$

La Tabla 2 muestra una comparación entre las eficiencias dadas en (12), para el caso de las plantas convencionales de la Tabla 1, trabajando en el régimen de máxima potencia de salida, reportadas también en Ladino-Luna (2003) y Árias-Hernández y col. (2004). Más aún, la comparación entre (9), (10) y  $\eta_{OBS}$  se muestra en la Figura 3.

Tabla 2. Comparación de valores para la eficiencia a máxima potencia de salida de las expresiones (9), (10), (12) y  $\eta_{OBS}$

Planta	$T_2/T_1$	$\eta_{MP}$	$\eta_{OPDP}$	$\eta_{SDP}$	$\eta_{OBS}$
Planta convencional de vapor por carbón quemado, West Turrock (Reino Unido), 1962	298/838	0.37625	0.33577	0.35601	0.360
Planta geotérmica de vapor, Lardarello (Italia), 1964	353/523	0.16198	0.14530	0.15364	0.160
Planta central de potencia vapor (Reino Unido), 1936-1940	298/698	0.40380	0.28648	0.34529	0.400
Planta de potencia de vapor (Estados Unidos de América), 1956	298/923	0.35620	0.36006	0.35813	0.340
Planta de ciclo combinado, vapor y mercurio (Estados Unidos de América), 1949	298/783	0.32089	0.31804	0.31947	0.280

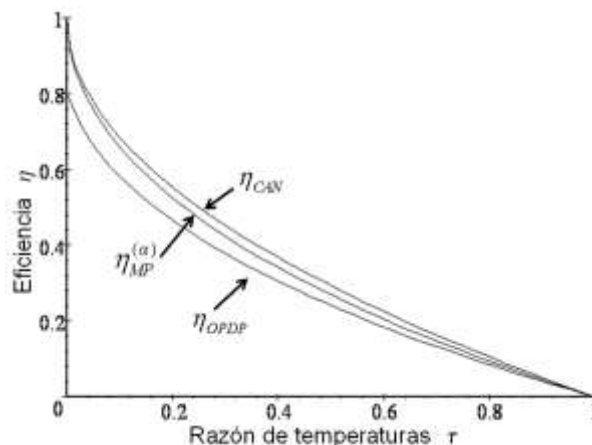


Fig. 3. Comparación gráfica de las eficiencias  $\eta_{OPDP}$ ,  $\eta^{(\alpha)}_{MP}$ ,  $\eta_{CAN}$ .

## RÉGIMEN DE MÁXIMA FUNCIÓN ECOLÓGICA

Es importante señalar que la función ecológica introducida por Angulo-Brown (1991a) para un ciclo tipo Carnot a tiempo finito, Ecuación (4), representa una relación entre una potencia de salida alta  $P$  y una potencia no utilizada por la máquina (que puede considerarse perdida),  $T_2\sigma$ . Ya hemos señalado que la función ecológica cumple la expresión (3), en el sentido de que su expresión analítica y la semisuma indicada tienen valores numéricos muy cercanos. Pero estos valores numéricos no son muy cercanos a los

valores experimentales, en el caso de plantas térmicas convencionales, y su mayor aproximación a dichos valores aparece para las plantas modernas (posteriores a 1980, nucleoelectricas), en cuyo caso resulta más conveniente utilizar otras expresiones de la eficiencia, como las obtenidas de manera aproximada, utilizando la ley de transferencia de calor de Dulong y Petit, en Ladino-Luna (2008), siguiendo la metodología mostrada en Gutkowicz-Krusin, y col. (1978), a función ecológica máxima,

$$\eta_{OEDP} = 1 - \frac{1 - \tau + \sqrt{649\tau^2 + 646\tau + 1}}{36}, \quad (13)$$

y utilizando un método variacional (Árias-Hernández y col., 2004), también a función ecológica máxima,

$$\eta_{ME}^{(\alpha)} = 1 + \frac{\tau}{8} - \frac{1}{8} \sqrt{\tau(40 + 41\tau)}. \quad (14)$$

De manera que para estas expresiones se cumple también la propiedad mostrada en (3). Esto es, se tienen las semisumas de las eficiencias en (9) y (10), con la eficiencia del ciclo de Carnot, muy cercanas a las eficiencias dadas en (13) y (14), respectivamente, y definidas como  $\eta_{SEDP}$  y  $\eta^{(\alpha)}_{SDP}$ , saber,

$$\eta_{OEDP} \approx \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{OPDP}) = \eta_{SEDP}, \quad (15)$$

$$\eta_{ME}^{(\alpha)} \approx \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{MP}^{(\alpha)}) = \eta_{SDP}^{(\alpha)}. \quad (16)$$

En las Figuras 4 y 5 se comparan las expresiones (13) y (14), y (15) y (16), con la eficiencia de Carnot, en donde se observa que se tiene, respectivamente, las propiedades,

$$\eta_{OPDP} \leq \eta_{OEDP} \leq \eta_C \quad \text{y} \quad \eta_{MP}^{(\alpha)} \leq \eta_{ME}^{(\alpha)} \leq \eta_C. \quad (17)$$

Además, la comparación numérica de estas expresiones de la eficiencia se muestran en la Tabla 3, para (15), y en la Tabla 4 para (16).

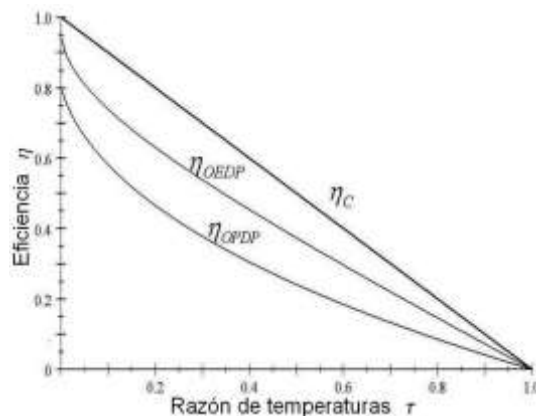


Fig. 4. Comparación entre las eficiencias  $\eta_{OPDP}$ ,  $\eta_{OEDP}$ ,  $\eta_C$ .

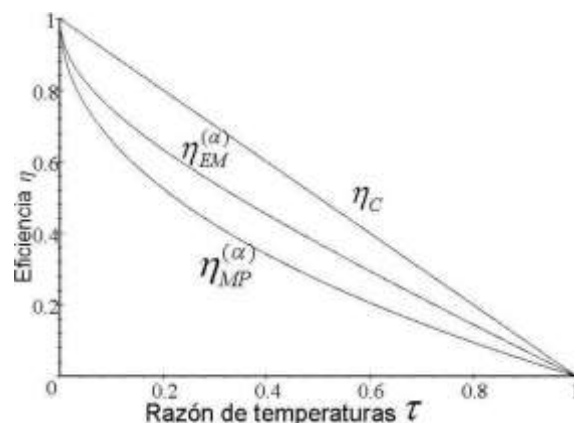


Fig. 5. Comparación entre las eficiencias  $\eta^{(\alpha)}_{MP}$ ,  $\eta^{(\alpha)}_{ME}$ ,  $\eta_C$ .

Tabla 3. Comparación entre las eficiencias  $\eta_{OEDP}$ ,  $\eta_{SEDP}$ ,  $\eta_{OBS}$ .

Planta	$T_2/T_1$	$\eta_C$	$\eta_{OPDP}$	$\eta_{OEDP}$	$\eta_{SEDP}$	$\eta_{OBS}$
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985	283/566	0.50000	0.24113	0.37358	0.37057	0.350
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Almaraz II (España), 1983	290/600	0.51667	0.25119	0.38675	0.38393	0.345
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Sizewell B (Reino Unido), 1995	288/581	0.50430	0.24371	0.37697	0.37401	0.363
Planta nuclear, Cofrentes (España), 1984	289/562	0.48577	0.23268	0.36239	0.35923	0.340
Planta nuclear, reactor avanzado enfriado con gas, Heysham (Reino Unido), 1988	288/727	0.60385	0.30732	0.45709	0.45559	0.400

Tabla 4. Comparación numérica entre  $\eta^{(\alpha)}_{ME}$ ,  $\eta^{(\alpha)}_{SDP}$  y  $\eta_{OBS}$ .

Planta	$T_2/T_1$	$\eta_C$	$\eta^{(\alpha)}_{MP}$	$\eta^{(\alpha)}_{ME}$	$\eta^{(\alpha)}_{SDP}$	$\eta_{OBS}$
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985	283/566	0.50000	0.26946	0.375	0.38473	0.350
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Almaraz II (España), 1983	290/600	0.51667	0.28079	0.3883	0.39873	0.345
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Sizewell B (Reino Unido), 1995	288/581	0.50430	0.27237	0.37843	0.38834	0.363
Planta nuclear, Cofrentes (España), 1984	289/562	0.48577	0.25996	0.36371	0.37287	0.340
Planta nuclear, reactor avanzado enfriado con gas, Heysham (Reino Unido), 1988	288/727	0.60385	0.34408	0.45949	0.47397	0.400

Es pertinente una comparación entre las eficiencias  $\eta_{OEDP}$ ,  $\eta^{(\alpha)}_{ME}$  y las observadas,  $\eta_{OBS}$ , para el caso de las plantas nucleo-eléctricas mostradas en las Tabla 1 y 4, que se muestra en la Figura 6 y en la Tabla 5, observándose la pequeña diferencia que existe entre  $\eta_{OEDP}$  y  $\eta^{(\alpha)}_{ME}$ .

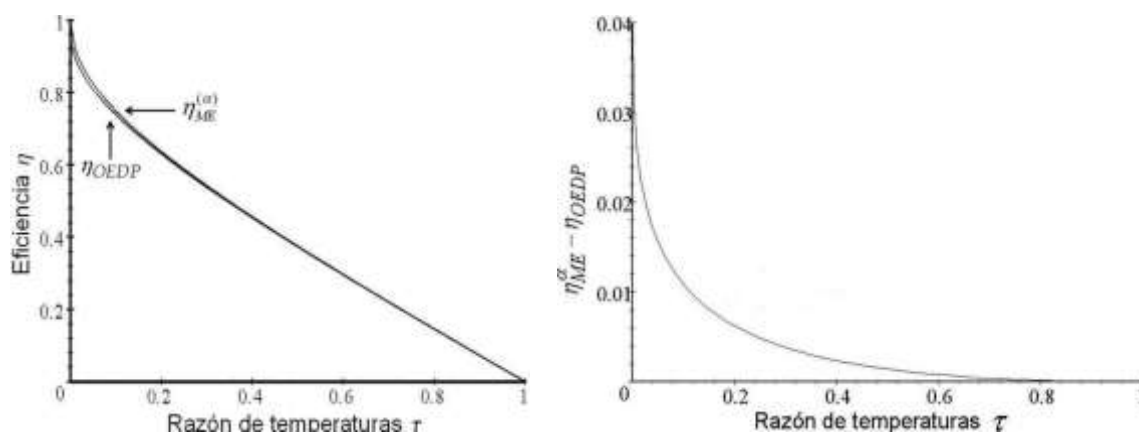


Fig. 6. Comparación entre las eficiencias  $\eta_{ME}^{(\alpha)}$  y  $\eta_{OEDP}$ .

Tabla 5. Comparación numérica entre  $\eta_{EP}^{(\alpha)}$  y  $\eta_{OEDP}$ , y la eficiencia observada

Planta	$T_2/T_1$	$\eta_{OEDP}$	$\eta^{(\alpha)}_{ME}$	$\eta_{OBS}$
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985	283/566	0.37358	0.375	0.350
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Almaraz II (España), 1983	290/600	0.38675	0.3883	0.345
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Sizewell B (Reino Unido), 1995	288/581	0.37697	0.37843	0.363
Planta nuclear, Cofrentes (España), 1984	289/562	0.36239	0.36371	0.340
Planta nuclear, reactor avanzado enfriado con gas, Heysham (Reino Unido), 1988	288/727	0.45709	0.45949	0.400

En la presente sección se han mostrado y comparado varias formas de semisuma de expresiones de eficiencia conocidas, con el objeto de hallar expresiones que teóricamente tengan valores muy cercanos a los valores experimentales de las plantas modernas. Observando los valores para  $\eta_E$  y  $\eta_{CAN}$  en la Tabla 1,

para el caso de las plantas modernas, con la misma idea de hallar expresiones con valores numéricos muy cercanos a los experimentales, podemos proponer una expresión en semisuma definida a partir de la combinación de estas eficiencias. Sea dicha eficiencia  $\eta_{SE}$ , se tiene entonces,

$$\eta_{SE} = \frac{1}{2}(\eta_{CAN} + \eta_E). \tag{18}$$

En la Figura 8 se muestra la cercanía de los valores experimentales dichas cinco plantas de la Tabla 1 (y en la Tabla 5), con la curva obtenida de la semisuma definida en (18), en un plano  $(\tau, \eta)$ , semejante al caso de máxima potencia de salida. Por otro lado, en la Figura 9 se observa que los valores obtenidos utilizando  $\eta_{OEDP}$  son muy cercanos a los valores experimentales, encontrándose una diferencia de menos de 5/100, como se puede apreciar en la Tabla 6. También se observa en esta tabla que una semisuma de  $\eta_E$  con  $\eta_{OEDP}$  da valores muy cercanos a los valores experimentales (menores a 1/100, respecto a la eficiencia observada), en la mayoría de los casos, para el régimen de máxima función ecológica, esto es, definiendo la semisuma de estas eficiencias como  $\eta_{SE}$ , se tiene,

$$\eta_{OBS} \cong \frac{1}{2}(\eta_E + \eta_{OEDP}) \approx \eta_{SE}. \tag{19}$$

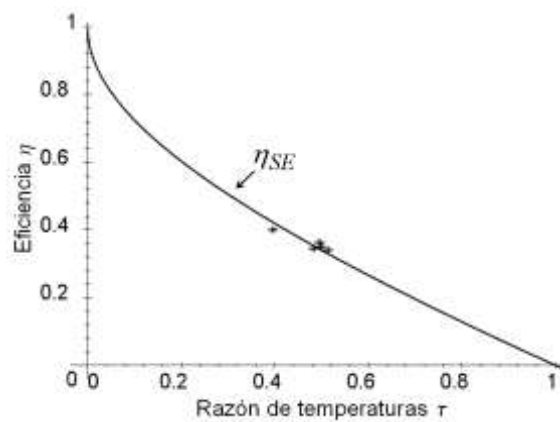


Fig. 8. Comparación de los valores experimentales de la eficiencia con los valores obtenidos usando (15).

Tabla 6. Comparación de los valores de las eficiencias utilizadas en (19) con  $\eta_{CAN}$  y  $\eta_{OBS}$  para las plantas modernas.

Planta	$T_2/T_1$	$\eta_{SE}$	$\eta_{OEDP}$	$\eta_{CAN}$	$\eta_E$	$\eta_{OBS}$
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985	283/566	0.34026	0.37358	0.29289	0.38763	0.350
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Almaraz II (España), 1983	290/600	0.35303	0.38675	0.30478	0.40127	0.345
Planta nuclear, reactor sobrecargado, Sizewell B (Reino Unido), 1995	288/581	0.34354	0.37697	0.29594	0.39114	0.363
Planta nuclear, Cofrentes (España), 1984	289/562	0.32947	0.36239	0.28290	0.37603	0.340
Planta nuclear, reactor avanzado enfriado con gas, Heysham (Reino Unido), 1988	288/727	0.42236	0.45709	0.37060	0.47413	0.400

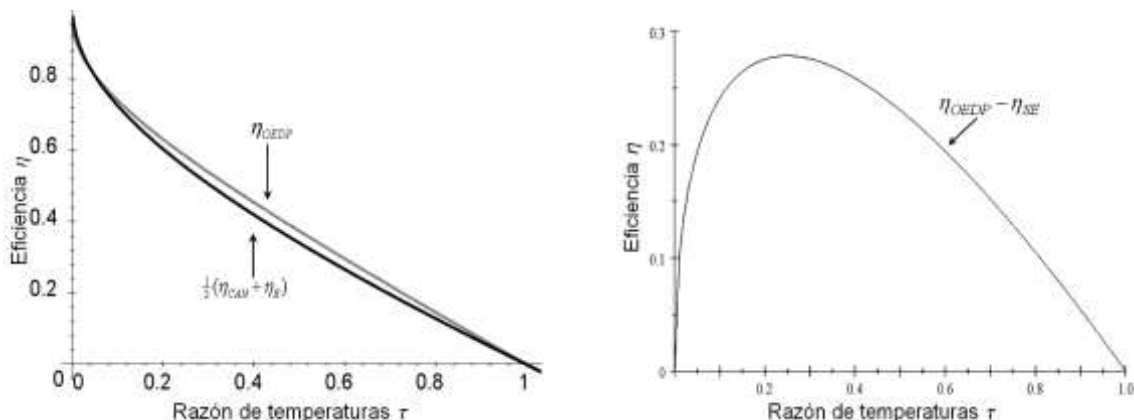


Fig. 9. Comparación de la curva de la eficiencia  $\eta_{OEDP}$  con la curva de la semisuma dada en (19)



Con estos resultados puede observarse como una combinación de expresiones de la eficiencia, en cualquiera de los regímenes de operación de una máquina térmica, modelada como un ciclo de Carnot modificado, con diferentes metodologías, permite modelar el desempeño de las plantas de potencia, en el sentido de que cada expresión obtenida indica la manera como es necesario considerar el proceso de intercambio de calor, entre la máquina propiamente dicha y sus almacenes de calor.

Sin embargo es necesario hacer notar que uno tiene que observar detenidamente las diferentes maneras de obtener las eficiencias mostradas, para poder arribar a la conclusión de que es posible proponer las expresiones en forma de semisuma, que se han comparado tanto gráficamente como numéricamente, entre ellas y respecto a los valores experimentales de la eficiencia, lo que nos da la idea de que, de manera semejante a la función ecológica, es posible hallar otras expresiones en forma de semisuma para la eficiencia. Se observa además que tanto para una transferencia de calor tipo ley de enfriamiento de Newton, como para una ley de transferencia calor tipo ley de Dulong y Petit se cumple la propiedad de semisuma, expresiones (3) y (12), respectivamente.

$$\eta_E \approx \frac{1}{2}[\eta(\text{Carnot}) + \eta(\text{Curzon} - \text{Ahlborn} - \text{Novikov})], \quad (20)$$

Se puede concluir que dicha propiedad de semisuma es un atributo general de las máquinas térmicas, en el sentido de que es esa la manera de operar cuando no se toman en cuenta otros efectos. Pero, si el objetivo es obtener expresiones analíticas con valores muy cercanos a los valores experimentales, es necesario construir expresiones, también en forma de semisuma, que involucren a las expresiones obtenidas dependiendo del régimen de operación, que contengan diferentes formas de transferencia de calor. Dicho de otra manera, puesto que las máquinas absorben y desechan calor en todas las formas posibles, (radiación convección, conducción y otras), éstas deben aparecer en las expresiones de la eficiencia que finalmente den valores muy cercanos a los valores experimentales.

Debe hacerse notar que es necesario hacer un análisis por separado para plantas convencionales, más acordes con la eficiencia a potencia máxima, y para plantas modernas (nucleoeléctricas), más acordes con una eficiencia a función ecológica máxima. Las expresiones analíticas de las semisumas discutidas se pueden escribir de manera concisa, de manera que puedan ser utilizadas como una sola expresión algebraica, y no como la forma expresada de manera operacional, esto es como las expresiones (3), (7), (12), (16), (19).

## CONCLUSIONES

Del estudio presentado, se pueden extraer las siguientes conclusiones principales:

- 1.- La expresión (20) resulta ser una característica general para modelar el desempeño de máquinas térmicas, modeladas como el ciclo de Curzon y Ahlborn, pero no es única, y no es la que tiene valores más cercanos a los experimentales.
- 2.- La forma de la eficiencia para analizar el desempeño de dichas máquinas no es único, y depende de las restricciones que se quieran imponer en su análisis.
- 3.- Es posible hallar una expresión analítica en forma de semisuma, con las restricciones que se quieran incluir, para expresar el desempeño de una máquina térmica modelada como el ciclo de Curzon y Ahlborn, vía las expresiones de la eficiencia halladas para esas restricciones en particular. Además, se encuentra que los valores experimentales observados de la eficiencia difieren dentro de intervalos muy pequeños respecto a las eficiencias calculadas con una expresión en semisuma, como las mostradas en el presente trabajo.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el total apoyo de la Universidad Autónoma Metropolitana-Atzacapatzalco (México) durante la realización de este trabajo. También se agradece a los revisores sus amables sugerencias y observaciones, que han permitido mejorar el presente trabajo.

## REFERENCIAS

- Angulo-Brown, F., An ecological optimization criterion for Finite-Time heat Engines, J. Appl. Phys., 69, 7465-7469 (1991a)
- Angulo-Brown, F., An Entropy production approach to the Curzon and Ahlborn cycle, Rev. Mex. Fís, 37, 87-96 (1991b)

- Angulo-Brown, F. y R.T. Páez-Hernández; Endoreversible thermal cycle with nonlinear heat transfer law, *J. Appl. Phys.*, 74, 2216-2219 (1993)
- Árias-Hernández, L.A., y F. Angulo-Brown; Thermodynamics optimization of endoreversible engines, *Rev. Mex. Fis.*, 40, 866-877 (1994)
- Arias-Hernández, L.A., G. Ares de Parga, y F. Angulo-Brown; On some nonendoreversible engine models with nonlinear heat transfer law, *Open Sys. & Information Dyn.*, 10, 351-375 (2003)
- Curzon F.L., y B. Ahlborn; Efficiency of a Carnot engine at maximum power output, *Am. J. Phys.*, 43, 22-24 (1975)
- Chambadal P., *Les Centrales Nucleares*, Armand Colin, Francia (1957)
- Chen, L., S. Xia, y F. Sun; Optimal paths for minimizing entropy generation during heat transfer processes with a generalized heat transfer law, doi: 10.1063/1.3082113, *J. of Applied Physics* 105, 044907/1-044907/5 (2009)
- Feidt, M., Reconsideration of criteria and modeling in order to optimize the efficiency of irreversible thermomechanical heat engines, doi:10.3390/e12122470, *Entropy*, 12, 2470-2484 (2010)
- Gutkowics-Krusin D., I. Procaccia y J. Ross, On the efficiency of rate processes. Power and efficiency of heat engines, *J. Chem. Phys.*, 69, 3898-3906 (1978)
- Huleihil, M. y Andresen, B., Generalized performance characteristics of refrigeration and heat pump systems, doi:10.1155/2010/341016, *Physics Research International*, 2010, 1-10 (2010)
- Kaushik, S.C., y S.K. Tyagi, Finite time thermodynamic analysis of an irreversible regenerative closed cycle brayton heat engine, *International Journal of Solar Energy*, 22, 141-151 (2002)
- Ladino-Luna D., Efficiency of a Curzon and Ahlborn engine with Dulong-Petit heat transfer law, *Rev. Mex. Fis.*, 48, 87-91 (2003)
- Ladino-Luna D., Approximate ecological efficiency with a non-linear heat transfer, *J. of the Energy Institute*, 81, 114-117 (2008)
- Ladino-Luna, D. y R.T. Páez-Hernández, Razón de compresión y aproximaciones lineales en el ciclo de Curzon y Ahlborn, doi:10.1612/inf.tecnol.4377it09, *Inf. Tecnológica*, 21(4), 87-96 (2010)
- Li, J., L. Chen, F. Sun, Heating load vs. COP characteristic of an endoreversible Carnot heat-pump subjected to the heat-transfer law  $q \propto (DT)^m$ , doi:10.1016/j.apenergy.2007.06.013, *Applied Energy*, 85, 96–100 (2008)
- Nelson, M. y P. Parker, *Advanced level physics*. 4th. Ed., pág. 194. Heinemann, U. K. (1977)
- Novikov I.I., The efficiency of atomic power stations (A Review), *J. Nuclear Energy II*, 7, 125-128 (1958)
- Pescetti, D., On the optimization of endoreversible processes, *Eur. J. Phys.*, 35, 1-6 (2014)
- Rebham E., Efficiency of nonideal Carnot engines with friction and heat losses, *Am. J. Phys.*, 70, 1143-1149 (2002)
- Rubin M., Optimal configuration of a class of irreversible heat engines I, *Phys. Rev. A*, 19, 1272-1276 (1979)
- Rubin M., Optimal configuration of a class of irreversible heat engines II, *Phys. Rev. A*, 19: 1277-1289 (1979)
- Salamon P., A. Nitzan, B. Andresen y R.S. Berry, Minimum entropy production and the optimization of heat engines, *Phys. Rev. A*, 21, 2115-2129 (1980)
- Sanchez-Salas, S., J. C. Chimal-Eguia y F. Guzman-Aguilar, On the Dynamic Robustness of a Non-Endoreversible Engine Working in Different Operation Regimes, doi:10.3390/e13020422, *Entropy*, 13, 422-436 (2011)
- Taylor L.W., *Manual of advanced undergraduate experiments in physics*, pág. 115. Addison-Wesley, U. K. (1959)
- Torres J.L., Minimal rate entropy production as a criterion of merit for thermal engines, *Rev. Mex. Fis.*, 34, 18-24 (1988)
- Ust, Y., Performance analysis and optimization of irreversible air refrigeration cycles based on ecological coefficient of performance criterion, *Applied Thermal Engineering*, 29, 47–55 (2009)
- Xia, D., L. Chen, y F.Sun, Ecological optimization of endoreversible chemical engines, *IJEE*, 2, 909-920 (2011)